

國立新竹女子高級中學 103 學年度第一學期第 2 次教師甄選數學科測驗題

※答案請勿以次方、!、C、P、H 等記號表示

一、填充題：(每格 6 分，共 84 分)

1. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ，若 $A(1), B(\omega), C(\omega^2), D(\omega^3), E(\omega^4)$ 為複數平面上五點，試求 $\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \overline{AE}$ 之值 = _____。

2. 有編號 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 個盒子，在第 k 號盒子內裝有 $n+k$ 個紅球和 $n-k$ 個白球。已知每個盒子被取到的機會均等，現任取一個盒子，並由此盒子內每次隨機取一個球，取後放回，共取 3 次。若此 3 個球均為紅球的機率為 P_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$ _____。

3. x^6 除以 $(x-2)^3$ 得餘式為 $f(x)$ ，求 $f(1) =$ _____。

4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴定義式為 $\begin{cases} a_1 = 3, a_2 = 5 \\ a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ，試求一般項 $a_n =$ _____。

5. 袋中有 3 個黃球、2 個白球、5 個黑球，每次取一球，取後不放回，取完為止，則黃球最先取完的機率為 _____。

6. 老師欲以三種食物：包子、蛋糕、粽子祝福班上同學考試順利，若將全班分成 A, B, C, D, E, F, G 共 7 組，並請每一組在一張卡片上寫下想吃哪幾種食物。結果：選擇 1 種及 2 種食物的各有 3 組，有 1 組都不想吃，沒有任何 2 組想吃的食物完全相同。則任取 3 張卡片，3 張卡片包含 3 種食物的機率 = _____。

7. 試求 $\int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-x)(x+x^n)}{1+x^n} dx =$ _____。

8. 設點 $(3,0)$ 及 $(0,a)$ 為橢圓 Γ 之兩焦點，且 $2x+y=1$ 和 $2x+y=16$ 為橢圓 Γ 之兩切線，試求橢圓之短軸長為 _____。

國立新竹女子高級中學 103 學年度第一學期第 2 次教師甄選數學科測驗題

9. 設 $f(x) = \frac{\pi}{16}(x-3)(x-9) + \frac{\pi}{48}(x-3)(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{12} \times (x-1)(x-9)$ ，試求 $f(x)$ 之最小值為_____

10. 求 $\sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 之整數部份為_____

11. $\sum_{k=1}^{10} k^2 C_k^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} =$ _____

12. 求滿足 $(x-2\cos\theta)^2 + (y-2\sin\theta)^2 = 9$ 之點 $P(x,y)$ 所形成之區域面積為_____

13. 已知直線 $L: y = \sqrt{3}x$ ，圓 $O: (x-40)^2 + (y-30)^2 = 100$ ， $A、B、C$ 三點依序在 x 軸、直線 L 及圓 O 上，試求出 $\triangle ABC$ 周長的最小值=_____。

14. 設 $a、b、c$ 為三相異正數，且 $a、b、c$ 皆不為 1。若 $a、b、c$ 成等比數列，且 $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ 成等差數列，求此公差為_____

國立新竹女子高級中學 103 學年度第一學期第 2 次教師甄選數學科測驗題答案

※答案請勿以次方、!、C、P、H 等記號表示

一、填充題：(每格 6 分，共 84 分)

1. 5	2. $\frac{15}{32}$	3. 112	4. $\frac{21}{5} - \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
5. $\frac{13}{40}$	6. $\frac{23}{35}$	7. $\frac{7}{6}$	8. $2\sqrt{10}$
9. $\frac{4\sqrt{2} - \pi}{3}$	10. 38	11. $\frac{40}{3}$	12. 24π
13. $40\sqrt{3}$	14. $-\frac{3}{2}$		