2006 年美國國際數學邀請賽(AIME)

American Invitational Mathematics Examination

考 試 須 知

1. 未經監考人員宣佈打開測驗卷之前，不可先行打開試卷作答。
2. **本次測驗共 15 題，測驗時間共 3 小時**。所有答案是範圍在 000 至 999 之間的整數。如答案為 7，請塗黑 007；如答案為 43，請塗黑 043。全對才給分，沒有倒扣或部份給分。
3. 可攜帶無記號空白計算紙、方格紙、尺、圓規、量角器，**不可使用計算機**。
4. 請務必使用 2B 鉛筆作答。
5. **請檢查所填寫的答案數字與塗黑的圓圈是否一致，任何的答案數字及塗黑的圓圈如果不一致，將不予計分**；如欲修正，請將錯誤擦拭乾淨。
6. 測驗進行中，各試場每次只允許一位學生上廁所，但須將試卷及答案卡交由監試人員保管。
7. 交卷時請將試題卷及答案卡一併交回，測驗開始 40 分鐘後，始准交卷離場。

2006 AIME 2

1. 在凸六邊形 $ABCDEF$ 中，六邊都等長，$\angle A$ 與 $\angle D$ 為直角，且 $\angle B$、$\angle C$、$\angle E$ 與 $\angle F$ 的度數相同。已知這六邊形的面積為 $2116(\sqrt{2}+1)$，試求 $\overline{AB}$ 之長。

2. 已知面積為正的某三角形，它的三邊長分別為 $\log_{10}12$、$\log_{10}75$ 及 $\log_{10}n$，其中 n 為正整數，試求 n 有多少個可能的值。

3. 設 P 為前 100 個正奇數的乘積，試求最大的整數 k 使得 P 可以被 3^k 整除。

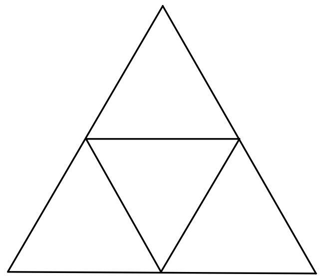
4. 考慮 $(1,2,3,\cdots,12)$ 的重排 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{12})$，它滿足
$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6 \quad \text{及} \quad a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}<a_{11}<a_{12}\text{。}$$
例如 $(6,5,4,3,2,1,7,8,9,10,11,12)$ 即為一個滿足上述條件的重排。試求滿足上述條件重排的個數。

5. 當擲一枚不公正的六面骰子時，出現 F 面的機率大於 $\frac{1}{6}$，出現與 F 面對面的那一面機率小於 $\frac{1}{6}$，且出現其他各面的機率都是 $\frac{1}{6}$；若每一面與其對面上數字的和都等於 7。當擲兩枚這種骰子時，兩枚骰子所出現的面上之數字和等於 7 的機率是 $\frac{47}{288}$。已知擲一枚這種骰子時，出現 F 面的機率是 $\frac{m}{n}$，其中 m、n 為互質的正整數，試求 $m+n$ 之值。

6. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 1。點 E 與點 F 分別在 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 上，使得 ΔAEF 為正三角形。作一個正方形，以 B 為其一個頂點使得各邊與正方形 $ABCD$ 的邊平行，且它有一頂點在線段 $\overline{AE}$ 上。已知這個較小的正方形之邊長為 $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$，其中 a、b、c 均為正整數且 b 不能被任何質數的平方整除，試求 $a+b+c$ 之值。

7. 試求所有滿足$a+b=1000$且a與b各位數字均不為 0 的正整數數對(a,b)之個數。

8. 無限供應由色紙製作的全等小正三角形。每一個小三角形都是單一顏色，色紙兩面的顏色相同。如右圖所示，一個大正三角形是由四個這種小正三角形所組成。兩個大正三角形，如果其中一個不能藉由翻轉、旋轉、或鏡射後放到另一個大正三角形上，使得每一個對應的小三角形有相同的顏色，則稱這兩個大三角形是可區分的。若有六種不同顏色的小三角形可供選取，則共可組成多少種可區分的大三角形？



9. 圓C_1、C_2、C_3的圓心分別為$(0,0)$、$(12,0)$、$(24,0)$，且其半徑分別為 1、2、4。直線t_1是C_1和C_2的內公切線，其斜率為正；直線t_2是C_2和C_3的內公切線，其斜率為負。設直線t_1和t_2交於(x,y)點，且$x=p-q\sqrt{r}$，其中 p、q、r 為正整數且r不能被任何質數的平方整除，試求 $p+q+r$ 之值。

10. 有七個球隊進行足球錦標賽，每一個球隊與其他各球隊都恰比賽一場。每場球賽都分出勝負，每個球隊所參賽的每一場球輸贏的機率都是 50%，且各場球賽的結果都是互相獨立的。每場球賽贏者得 1 分，輸者得 0 分；以各隊得分的總和排定各隊的名次。錦標賽的第一場球賽的結果是 A 隊贏了 B 隊，在錦標賽結束時 A 隊總得分多於 B 隊總得分的機率為$\dfrac{m}{n}$，其中m、n為互質的正整數，試求$m+n$之值。

11. 某個數列定義如下：$a_1=a_2=a_3=1$，且對於任意的正整數n，$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$。已知$a_{28}=6090307$，$a_{29}=11201821$，$a_{30}=20603361$。試求$\sum_{k=1}^{28} a_k$除以 1000 的餘數。

12. 正三角形ΔABC內接於半徑為 2 的圓。將$\overline{AB}$由A到B向外延長至D點使得$\overline{AD}=13$，且將$\overline{AC}$由A到C點向外延長至E點使得$\overline{AE}=11$。過D點畫一條平行於$\overline{AE}$的直線ℓ_1，過E點畫一條平行於$\overline{AD}$的直線ℓ_2，直線ℓ_1與ℓ_2交於F點。G為圓上異於A的一點，且與A、F共線。已知ΔCGB的面積可以表示為$\frac{p\sqrt{q}}{r}$，其中其中p、q、r為正整數，p與r互質，且q不能被任何質數的平方整除，試求$p+q+r$之值。

13. 若正整數N小於 1000 且恰可以表示成 5 種j個接續正奇數之和，$j \geq 1$。試問這種N共有多少個？

14. 由$1, 2, 3, \cdots, 10^n$之所有整數中，其非 0 的各位數字倒數總和設為S_n，試求使得S_n是整數的最小正整數n。

15. 設實數x、y、z滿足

$$x=\sqrt{y^2-\frac{1}{16}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{16}}\ ,$$
$$y=\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{25}}\ ,$$
$$z=\sqrt{x^2-\frac{1}{36}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{36}}\ ,$$

且$x+y+z=\frac{m}{\sqrt{n}}$，其中m、n是正整數，且n不能被任何質數的平方整除，試求$m+n$之值。