1. 設 $f(x)= x^3- p x+q$ ， α 為 $f(x)=0$ 的一根，

$f(x)= (x-\alpha)[(x^2+\alpha x+(\alpha^2-p)]$ ， (綜合除法)

$x^2+\alpha x+(\alpha^2-p)=0$ 之兩根為二實根，

判別式 $\alpha^2-4(\alpha^2-p)\ge 0 \ \Rightarrow\ -\sqrt{\dfrac{4p}{3}}\le\alpha\le\sqrt{\dfrac{4p}{3}}$ 。

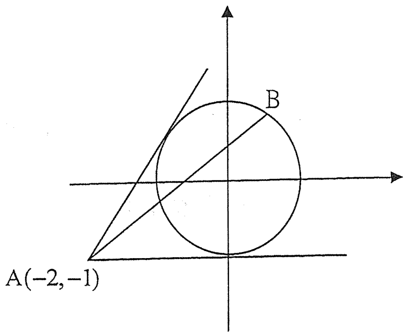
2. (1)令 $x=\cos^2\theta, y=\sin^2\theta, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，

則 $f(x,y)=(\cos^2\theta+\dfrac{1}{\cos^2\theta})^2+(\sin^2\theta+\dfrac{1}{\sin^2\theta})^2\ge\dfrac{1}{2}(\cos^2\theta+\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\sin^2\theta+\dfrac{1}{\sin^2\theta})^2$

$=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{4}{\sin^2 2\theta})\ge\dfrac{1}{2}(1+4)^2=\dfrac{25}{2}$

$\sin 2\theta=1, \theta=\dfrac{\pi}{4}, (x,y)=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

(2)



幾何方法 $y=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$ ，令 $k=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$ ，

可視為 $A(-2,-1)$ 與 $B(\cos\theta,\sin\theta)$ 的直線之斜率

過 B 之切線假設為 $y+1=m(x+2)$

$\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1, k=0\vee\dfrac{4}{3}$

代數方法

$y=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}, 2y+y\cos x=1+\sin x, \sin x-y\cos x=2y-1$

$\sqrt{1+y^2}\sin(x+\theta)=2y-1, \sin(x+\theta)=\dfrac{2y-1}{\sqrt{1+y^2}}, |2y-1|\le\sqrt{1+y^2}, 4y^2-4y+1\le 1+y^2, y(3y-4)\le 0, 0\le y\le\dfrac{4}{3}$

3. 令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$g(x)=ax^3+dx^2+cx+b$

設 $d(x)$ 為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之 H.C.F.

則 $d(x) \mid f(x)-g(x)=(b-d)(x+1)(x-1)$

$f(1)=a+b+c+d$ $\quad f(-1)=-a+b-c+d$

$g(1)=a+d+c+b$ $\quad g(-1)=-a+d-c+b$

(1) $b=d$ 時. H.C.F.為 $f(x)$

(2) $a+c=b+d=0$ 時, H.C.F.為 $(x-1)(x+1)$

(3) $a+c=b+d\neq 0$ 時, H.C.F.為 $x+1$

(4) $a+b+c+d=0$ 時, H.C.F.為 $x-1$

(5) 其他, H.C.F.為 1

4. (1) ΔABQ 的面積 $=\frac{\overline{AB}\,\overline{BQ}}{2}\sin\angle ABQ=\frac{8\times5\sqrt{3}}{2}\sin\left(\angle ABD+\angle DBQ\right)=20\sqrt{3}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=18+8\sqrt{3}$

(2)因為 $\overline{AQ}^2=\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-2\overline{AB}\,\overline{BQ}\cos\angle ABQ=8^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2-2\times8\times5\sqrt{3}\cos\left(\angle ABD+\angle DBQ\right)$

其中 $\cos\left(\angle ABD+\angle DBQ\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$,

故 $\overline{AQ}^2=139-80\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}-3}{10}=43+24\sqrt{3}$

5. $201\frac{1}{2}\le x\le 201\frac{2}{3}$

6. (1) $C_3^{2n}-\frac{2n}{2}(2n-2)-n(1+2+3+\ldots+(n-2))=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

(2) $(2n+1)[(1+2+\cdots+(n-1)]=\frac{n(n-1)(2n+1)}{2}$ 。

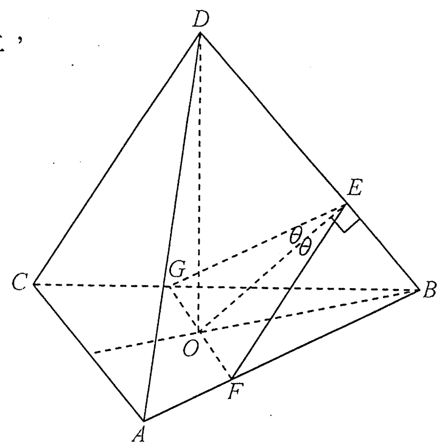
7. 答: $\frac{9t^3}{4\sqrt{3t^2-1}}$ 。

解:(如右圖)

作 $\overline{EF}\perp\overline{BD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F,作 $\overline{EG}\perp\overline{BD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G,則 $\angle FEG=2\theta$,

G、O、F 三點同在垂直 $\overline{BD}$ 於 E 的平面上且同在平面 ABC 上,

故 G、O、F 三點共線。



由正三角錐的對稱性,

$\Delta BEF\cong\Delta BEG\Rightarrow\overline{BF}=\overline{BG}\ \Rightarrow\overline{GF}\,//\,\overline{AC}$,

又 O 為 ΔABC 的重心,$\Rightarrow\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{FG}$,

$\Delta OEF\cong\Delta OEG\Rightarrow\angle OEF=\angle OEG=\theta$ 且 $\angle EOF=90°$,

ΔOEF 中,$\overline{OF}=\overline{OE}\tan\theta=\tan\theta$,

$\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{FG}=\frac{3}{2}(2\tan\theta)=3\tan\theta$ 且 $\overline{OB}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(3\tan\theta)=\sqrt{3}\tan\theta$,

$\Delta DOB\sim\Delta OEB$

$\Rightarrow\frac{\overline{OD}}{\overline{EO}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{EB}}\Rightarrow\overline{OD}=\overline{EO}\times\frac{\overline{OB}}{\overline{EB}}=1\times\frac{\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{(\sqrt{3}\tan\theta)^2-1}}=\frac{\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3\tan^2\theta-1}}$,

三角錐 D-ABC 的體積為 $\frac{1}{3}$(ΔABC 的面積)$\times\overline{OD}=\frac{1}{3}[\frac{\sqrt{3}}{4}(3\tan\theta)^2]\times\frac{\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3\tan^2\theta-1}}=\frac{9t^3}{4\sqrt{3t^2-1}}$ 。#

8. 1、將$\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$表示成$\dfrac{\frac{1}{2}}{(x^2+1)}-\dfrac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$

2、$\int_0^1\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{1}{(x^2+1)}dx-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)^2}dx$

$\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{1}{(x^2+1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{8}$

3、 $\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)^2}dx=\dfrac{1}{2}\times(x+1)^{-1}|_0^1=\dfrac{1}{4}$

所求為：$\dfrac{\pi-2}{8}$

9. $\dfrac{1}{h}(\dfrac{g(a+3h)}{f(a-3h)}-\dfrac{f(a)}{g(a)})=\dfrac{1}{f(a-3h)g(a)}(\dfrac{g(a)g(a+3h)-f(a)f(a-3h)}{h})$

$=\dfrac{1}{f(a-3h)g(a)}(\dfrac{g(a)g(a+3h)-g^2(a)+f^2(a)-f(a)f(a-3h)}{h})$

$=\dfrac{1}{f(a-3h)g(a)}(3g(a)\dfrac{g(a+3h)-g(a)}{3h}+3f(a)\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{-3h})$

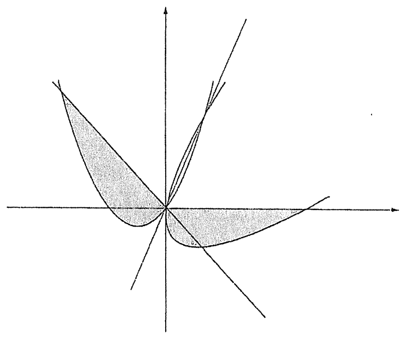
$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}(\dfrac{g(a+3h)}{f(a-3h)}-\dfrac{f(a)}{g(a)})$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{f(a-3h)g(a)}(3g(a)\dfrac{g(a+3h)-g(a)}{3h}+3f(a)\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{-3h})$

$=\dfrac{1}{f(a)g(a)}(3g(a)g'(a)+3f(a)f'(a))=\dfrac{1}{2\times2}(3\times2\times4+3\times2\times3)=\dfrac{21}{2}$

10. 答: (1)$9x^2-24xy+16y^2-50x+25y=0$ (2)$\dfrac{500}{81}$。

解: (1)設直線 L 與正向 x 軸所夾的有向角為θ，$(0\leq\theta<\pi)$，



則$\tan\theta=2$，$\cos2\theta=\dfrac{1-2^2}{1+2^2}=-\dfrac{3}{5}$，$\sin2\theta=\dfrac{2\times2}{1+2^2}=\dfrac{4}{5}$，

取鏡射矩陣$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3x'+4y'}{5}\\ \frac{4x'+3y'}{5}\end{bmatrix}$ (代入 $y=x^2+2x$)

$\Rightarrow\dfrac{4x'+3y'}{5}=(\dfrac{-3x'+4y'}{5})^2+2(\dfrac{-3x'+4y'}{5})$。

$\Rightarrow9x'^2-24x'y'+16y'^2-50x'+25y'=0$。#

(2) x 軸($y=0$)關於直線 L: $y=2x$ 的鏡射直線

為$\dfrac{4x'+3y'}{5}=0$，即 $4x+3y=0$，

作圖可知，「Γ'與 x 軸所圍出封閉區域的面積」等於「二次函數 $y=x^2+2x$ 的圖形與直線 $4x+3y=0$ 所圍出封閉區域的面積」。

$\begin{cases}y=x^2+2x\\ 4x+3y=0\end{cases}\Rightarrow x=0$ 或$-\dfrac{10}{3}$，所求面積: $\int_{-\frac{10}{3}}^{0}[(-\dfrac{4}{3}x)-(x^2+2x)]dx=\dfrac{500}{81}$。#