臺北市立松山家商103學年度第1次教師甄選初試

數學科 試題卷

說明：本試題共兩頁，請將答案寫在答案卷上。

一、填充題：(每格 6 分)

1. 函數 $f(x)=1+\log_3 x$ 其中 $1\le x\le 9$，則函數 $f^2(x)+f(x^2)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 M+m=__________。

2. 已知 O 為 ΔABC 的外心，若 $\left|\overline{AB}\right|=4$，$\left|\overline{AC}\right|=6$，則 $\overline{AO}\cdot(\overline{AB}+\overline{AC})$ =__________。

3. 有 4 位同學參加電視台猜獎遊戲，競賽規則規定：每位同學必須從甲、乙兩道題中任選一題作答，選甲題答對得 21 分，答錯扣 21 分；選乙題答對得 7 分，答錯扣 7 分。若幾位同學的總分為 0，試求這 4 位同學得分的情況有__________種。

4. 設 $a_n=(-1)^{n+1},\ n\in N$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ n\in N$，$C_n=\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n},\ n\in N$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n$ =__________。

5. 已知 $\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，試求 $\tan^2 18^\circ\cdot\tan^2 54^\circ$ 之值__________。

6. 坐標平面上ΔABC，其中 $A(2,\ 1)$，$\angle B$ 與 $\angle C$ 的內角平分線分別為 L_1：$\begin{cases}x=t+2\\ y=-t-1\end{cases}$，$t\in R$ 與 L_2：$\begin{cases}x=2t\\ y=t-1\end{cases}$，$t\in R$，試問直線 $\overline{BC}$ 方程式=__________________。

7. 設方程式 $x+2^x=4$ 的根為 α ，$2^{4-x}=x$ 的根為 β ，試求 $\alpha+\beta=$__________ 。

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=$ __________ 。

9. 若 P 是正三角形 ABC 內一點，且 $\overline{PA}=3$ ，$\overline{PB}=4$ ，$\overline{PC}=5$ ，求 $\angle$APB =__________ 。

10. 若方程式 $2x^4-7x^3+6x^2+4x+1=0$ 的四根為 α，β，γ，δ ，
試求：$(2-\alpha^2)(2-\beta^2)(2-\gamma^2)(2-\delta^2)=$____________ 。

二、計算證明題：(每題10分)

1. 已知：$a>b>c$ ，試證：$a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$

2. 甲投擲 2 個骰子，乙投擲 3 個骰子，若甲投擲 2 骰子中最大的點數為A，乙投擲 3 骰子中最大的點數為B，今規定A ≥B時，甲獲勝，A<B時，乙獲勝，試判斷甲，乙獲勝的機率何者較大，並證明之。

3. 設 $f(x)=(x-a)(x-b)^2(x-c)^3$，其中 $a<b<c$ ，若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 、0、1 有極值，求此時 a 、b 、c 之值各為何？

4. 若圓內接四邊形 ABCD 的四邊分別為 a，b，c，d ，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ ，則
試證：四邊形 ABCD 之面積=$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 。