

新北市立高級中等學校 103 學年度教師聯合甄選

數學科試題

考生作答說明：

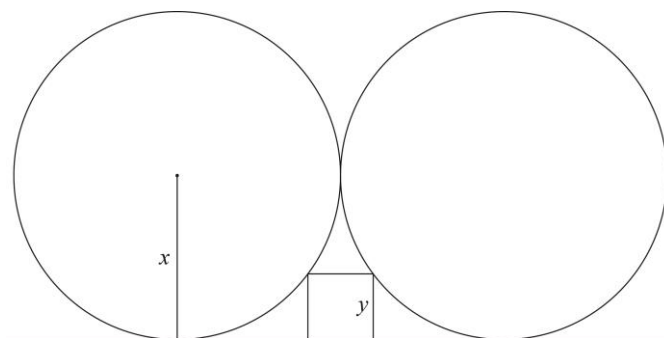
- 一、請先檢視答案卷(卡)准考證號碼、姓名是否相符？如果不符，請立即向監試人員反映。
- 二、本試題計選擇題 3 題，填充題 9 題，計算題 5 題。
- 三、題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
- 四、請使用黑色 2B 鉛筆於答案卡上畫記作答，禁止使用立可白塗改，以免無法判讀。
- 五、答案卷(卡)與題目卷須一起繳交，始可離開試場。

一、選擇題：15%，每題 5 分

1. 有一個梯形，它有一個內角是直角。存在一個半徑為 r 的圓，與此梯形的四個邊均相切。若此梯形的面積為 $\frac{25}{4}r^2$ ，請問此梯形的兩平行邊的長度之比為何？
(A) 2:5
(B) 1:3
(C) 3:8
(D) 1:4
2. 從前面或後面讀過來都一樣的正整數，稱為「迴文數」，例如：5, 141, 33233 等等。將所有的迴文數由小到大依序排成一列，形成數列：1, 2, ..., 11, 22, ..., 101, 111, 121, ..., 202, ...。請問此數列的第 2014 項為何？
(A) 1015101
(B) 1350531
(C) 1127211
(D) 1490941
3. 甲、乙、丙三人參加了一個桌球比賽。第一天時，主辦單位從他們三人之間抽出兩人比賽一場；其後的每一天，都是之前一天的負方休息，其餘兩人則比賽一場。在比賽開始後的若干天，統計三人的比賽紀錄，發現甲贏了 22 場，乙贏了 20 場，而丙贏了 32 場。請問甲一共比賽了幾場？
(A) 32
(B) 40
(C) 48
(D) 56

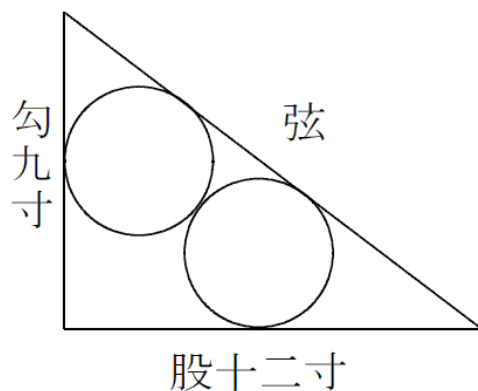
二、填充題：45%，每題 5 分

1. 如圖，半徑為 x 的兩圓相切，且與下方直線亦相切，而邊長為 y 的正方形與兩圓各恰交一點：



求半徑 x 與正方形邊長 y 的關係？

2. 在一勾九寸、股十二寸的直角三角形內，有兩個直徑相同的圓，彼此相切，與邊也相切，如圖所示。試求這兩個相同圓的半徑。



3. 桌上有十個骰子，當中有一個骰子出現 5 點的機率是 $\frac{1}{2}$ 、而出現其他點數的機率均等；其他九個都是均勻的骰子。用隨機的方式選取一個骰子來投擲。在出現 5 點的情況下，被選取的骰子是不均勻骰子的條件機率為何？（答案若為分數，請化為最簡分數）

4. 函數 $f(x) = \cos^4 x + 3\sin^4 x$ 的最小值為何？
5. 英國哥倫比亞大學物理學家懷特海德製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大為前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。根據萬有引力定律測得：地球質量為 5.976×10^{27} 公克，試問：懷特海德所排的骨牌中，從第幾張開始的重量會比地球還重。（參考數據： $\log 5.976 = 0.7764$ ）
6. 在坐標空間中，已知平面 E 通過三點 $P(2,0,0)$ 、 $Q(0,-3,0)$ 、 $R(0,0,a)$ ， $a \geq 0$ 。若 E 與 yz 平面的夾角為 45° ，則求 a 的值。
7. 將「人人為我 我為人人」8 個字作一排列，但最後一個「我」字要出現在最後一個「為」字之前。合乎條件的排列方式共有_____種。
8. 坐標空間中，設 E 為向量 $(1,-2,1)$ 與 $(2,2,-3)$ 所張出的平面。則向量 $(0,1,-1)$ 對平面 E 的正射影向量為_____。
9. 已知方程式 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 只有一個實根，記為 r ；已知 $0.4 < r < 0.5$ 。則無窮級數 $\sum_{k=0}^{\infty} r^{3k+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算題：40%，每題 8 分

1. 設整數 x 、 y 滿足 $\log x + \log y$ 為整數，但 $\log x$ 、 $\log y$ 及 $\log x^3 y^2$ 都不是整數。

若 $x^3 y^2$ 是一個 6 位數，則求所有的整數數對 (x, y) 。

2. 定義數列 $\{a_n\}$ 如下： $a_1 = p$ 為正有理數；對所有的正整數 n ，令 $a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2}$ 。證明：

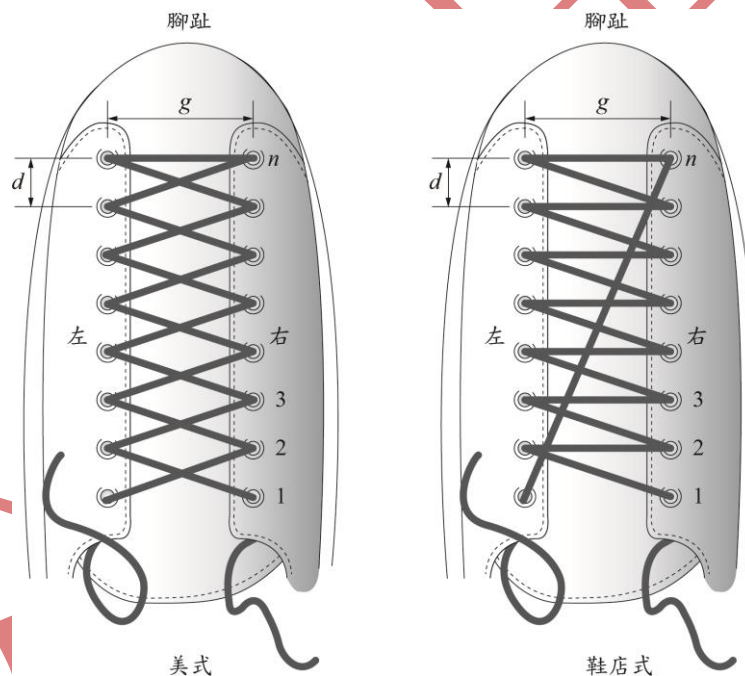
如果 $p > \sqrt{2}$ ，則整個數列 $\{a_n\}$ 的每一項都大於 $\sqrt{2}$ ；如果 $p < \sqrt{2}$ ，則整個數列 $\{a_n\}$ 的每一項都小於 $\sqrt{2}$ 。

3. 設坐標空間中的原點為 $O = (0, 0, 0)$ 。考慮所有滿足 $\overline{OP} \times (1, 2, 3) = (-1, -1, 1)$ 的點 $P(x, y, z)$ 。請問這些點 P 所形成的圖形為何？試求此圖形的方程式。

4. 令 $\lfloor x \rfloor$ 代表不超過實數 x 的最大整數。考慮數列 $\{a_n\}$ ，其中的第 n 項的定義是

$a_n = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 。令 a_N 為此數列中最接近 2014 的那一項。試求正整數 N 以及 a_N 之值。

5. 綁鞋帶的方式五花八門，以下兩個圖案是常見的綁鞋帶方式，美式綁帶法與鞋店式綁帶法：



圖中的符號 n 、 d 及 g 分別代表：

- 數目 n ($n \geq 2$) 是指鞋子左右兩側各有 n 個鞋帶孔。
- 距離 d (公分) 為相鄰兩孔的距離。
- 間距 g (公分) 為左右對應兩孔的間距。

若在穿孔之後打一個蝴蝶結，左右兩側的鞋帶各需 15 公分，則在上述兩種綁鞋帶的方式之中哪一種方式所需之鞋帶較短？並證明你的結論。