

# 國立鳳山高級中學 103 年教師甄試數學科試題

一、 填充題：70 分(每題 5 分)(填充題須標示題號與答案，可不必列出計算過程)

1. 若  $\theta \in R$ ， $A = \frac{\cos \theta + 4}{\sin \theta - 3}$  之最小值為  $m$ ，最大值為  $M$ ，則數對  $(m, M) =$  \_\_\_\_\_。
2. 平行四邊形  $ABCD$  中， $E \in \overline{CD}$ ， $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{DC}$ ， $F \in \overline{BC}$  且  $\overline{BF} = \frac{1}{5}\overline{BC}$ ， $\overline{AE}, \overline{DF}$ ，交於  $P$  點，求  $\Delta PDE$  的面積：平行四邊形  $ABCD$  的面積=\_\_\_\_\_。
3. 已知正四面體  $S-ABC$  的稜長為 10，其內部有四個半徑相同且兩兩相切的小球，每個小球也都與相鄰的三個面相切，則小球半徑為\_\_\_\_\_。
4. 將一矩形（邊長均為整數）的角剪去一個三角形後形成一個新的五邊形，今知此五邊形之邊長為 13,19,20,25,31（不一定照順序成五邊形），試問此五邊形之面積為\_\_\_\_\_。
5. 已知  $x > 1$ ， $y > 1$  且  $(\log x)^2 + (\log y)^2 = 2(\log x + \log y)$ ，試求  $x^{\log y}$  的最大值\_\_\_\_\_。
6.  $\Delta ABC$  中， $M$  為  $\overline{AB}$  之中點， $\overline{AB} = 2$ ，且  $\overline{BD}$  為  $\angle ABC$  之分角線， $D \in \overline{AC}$ ，又  $\overline{BD} \perp \overline{MD}$ ，求  $\overline{BC} =$ \_\_\_\_\_。
7. 3 男 3 女參加電視速配節目，經過彼此了解之後，男女分別寫下自己心儀的異性對象（每人限選一人，不可不選）。若男女互相選擇對方，則為速配成功！問恰有兩對速配成功的情形有\_\_\_\_\_種。
8. 試求定積分  $\int_{-1}^1 |x - \sqrt{1-x^2}| dx =$ \_\_\_\_\_。
9.  $\tan x = 3 \tan y (0 \leq y \leq x < \frac{\pi}{2})$ ，若  $u = x - y$ ，則  $u$  的最大值=\_\_\_\_\_。
10. 已知  $f(x) = |1 - 2x|$ ， $0 \leq x \leq 1$ ，求方程  $f(f(f(x))) = \frac{1}{2}x$  的解的個數=\_\_\_\_\_。

11. 若  $\text{Arg}(z^2 - 4) = \frac{5\pi}{6}$ ， $\text{Arg}(z^2 + 4) = \frac{\pi}{3}$ ，則  $\text{Arg}(z) =$ \_\_\_\_\_。
12. 將「跳針跳針跳針叫我姐姐」十個字排成一列，但「跳」不可與「針」相鄰，則共有\_\_\_\_\_種符合條件的排法。
13. 已知方程式  $(x+12)(x+2)(x-1)(x-4)(x-5) + x(x-2)(x-3)(x-8)(x-18) = 0$  有一個有理根，其他都是虛根，試求出此有理根\_\_\_\_\_。
14. 設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是從  $-1, 0, 1$  這三個整數中取值的數列。若  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 12$  且  $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_n + 1)^2 = 82$ ，且這  $n$  筆資料的標準差  $= \frac{\sqrt{2}}{2}$  (此處標準差公式為： $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \mu)^2}{n}}$ ，其中  $\mu$  為  $n$  筆資料的算術平均數)，試問： $n =$ \_\_\_\_\_。

二、 計算證明題：30 分(每題 10 分)(須列出詳細計算與證明過程)

1. 試求： $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2014}$  的小數點後第一位數字。
2. 有一個圓之圓心為  $C$ ，圓上有一點  $A$ ，圓內有一點  $B$ ，圓外有一點  $D$ ，已知  $B$  為  $\overline{AC}$  中點， $A$  為  $\overline{CD}$  中點。試證明：對於圓上任一點  $P$ ，若  $P$  不在  $\overline{AB}$  上，則  $\overline{PA}$  為  $\angle BPD$  的角平分線。
3. 設  $a, b, c, d \geq 0$ ，試證  $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)(d^2 + 2) \geq 4(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$

# 國立鳳山高級中學 103 年教師甄試數學科答案

一

1.  $(\frac{-6-\sqrt{6}}{4}, \frac{-6+\sqrt{6}}{4})$

2. 2:57

3.  $\sqrt{6}-1$

4. 745

5. 10000

6.  $\frac{2}{3}$

7. 144

8.  $1+\frac{\pi}{4}$

9.  $\frac{\pi}{6}$

10. 8

11.  $\frac{\pi}{3}$  或  $\frac{4\pi}{3}$

12. 4080

13.  $\frac{1}{2}$

14. 36