

臺北市立松山高級工農職業學校 99 學年度
教師甄選【數學科】初試試題

計算題(請勿使用計算機。共 9 題，第 6 題 20 分，其餘各題均為 10 分。)

1. 已知拋物線 $y^2 = 2ax$ 上的點 P 到直線 $x - y = -3$ 的最短距離為 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ，求點 P 的座標。
2. 設 \overline{AB} 的長度是 d ， P 是以 \overline{AB} 為直徑的半圓上的一個動點，且 $\angle PAB = \theta$ 。令 $\overline{PA} + \overline{PB} = x$ ，
(1) 將 $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta$ 表示成 x 的函數。(2) 求 $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta$ 的最小值，並求此時 θ 和 x 的值。
3. 設對所有實數 x ，不等式 $x^2 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + x \log_2 \left(\frac{2a}{a+1} \right)^2 + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$ 恆成立，求 a 的範圍。
4. 設飛機 A 具有兩個發動機，飛機 B 具有四個發動機，如果半數以上的發動機沒有故障，就能夠安全飛行。現在假如各個發動機發生故障的機率 p 是 t 的函數 $p = 1 - e^{-\lambda t}$ ，其中 t 是發動機起動後所經歷的時間， λ 為正的常數。若不考慮其他故障，試考察飛機 A 和飛機 B 哪一個安全？
5. 設 α, β, γ 是三個相異的複數， w 是 1 的立方根，若 $\alpha + w\beta + w^2\gamma = 0$ ，試問在複數平面上表示 α, β, γ 的三點成什麼圖形？
6. (1) 敘述並證明微積分基本定理。
(2) 計算 $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ 。($a > 0$)
7. 請問 $0.9 < 0.\bar{9} < 1$ 嗎？並請說明。
8. (1) 任給正數 $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ 。證明下式成立：
$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}。$$

(2) 設 n 為大於 1 的自然數，證明 $(n!)^3 < n^n \left(\frac{n+1}{2} \right)^{2n}$ 。
9. 何謂「母體標準差」？何謂「樣本標準差」？請問你如何向學生說明「母體標準差」與「樣本標準差」這兩者公式為何不同？