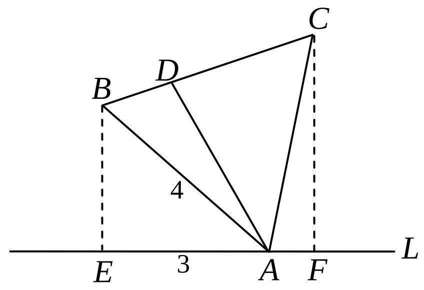
國立桃園高中 103 學年度第 1 次教師甄選 數學 科初試試題卷

編　號

-----------------------彌---------------------封-----------------------線-------------------

一、填充題【甲】(每格 4 分，共 24 分)

1.如右圖，ΔABC 為邊長 4 的正三角形，D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$，$A$ 在直線 L 上，點 E、F 分別為 B、C 對直線 L 所作垂線的垂足，若 $\overline{AE}=3$，則向量 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{EF}$ 的內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=$________。



2. 已知 x、$y\in R$，$x^2+y^2=25$，試求 $\sqrt{8y-6x+50}+\sqrt{8y+6x+50}$ 的最大值為________。

3.已知數值資料 $\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{2}{n},\frac{2}{n},\frac{2}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots\ldots,\frac{n}{n}$，其中 $\frac{i}{n}$ 有 $(2i+1)$ 個，$i=1,2,3,\ldots\ldots,n$，$n\in\mathbb{N}$。設此資料算術平均數為 μ，母體標準差為 σ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu^2+\sigma^2)=$________。

4.將 21 個相同的球全部放入 3 個不同的袋子，若每袋至少一球，且任二袋球數和大於第三袋球數，則球數的安排方案共有_________種。

5. 給定正實數 a，若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=e$，則 $a=$_________。(其中 e 為自然對數的底數)

6. 已知複數 z_1,z_2 滿足 $|z_1|=|z_2|=1$，且 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求 $(z_1z_2)^{10}=$_________。

二、填充題【乙】(每格 6 分，共 36 分)

7. 將與 105 互質的所有正整數由小到大排成一個數列，則此數列的第 2014 項為_________。

8. 已知 ΔABC 的三邊長 a,b,c 和面積 S 滿足關係式 $S=a^2-(b-c)^2$，且 $b+c=8$，則 ΔABC 的面積 S 的最大值為_________。

9. 已知實係數三次函數 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-bx^2+(2-b)x+1$，$f(x)$ 在 $x=x_1$ 處有極大值，在 $x=x_2$ 處有極小值，且 $0<x_1<1<x_2<2$，則 $a+2b$ 值的範圍為________。

國立桃園高中 103 學年度第 1 次教師甄選 數學 科初試試題卷

編　號

-----------------------彌---------------------封-----------------------線-------------------

10. 設四面體的六條稜線中有五條稜長為 2，另一條稜長為 a 。若當 $a=k$ 時，此四面體有最大體積 V ，則數對 $(k,V)=$_________ 。

11. 已知 Γ 為 $y=ax^3+bx$ （$a>0$，$b>0$），原點 O 為其反曲點，射線 $\overrightarrow{OA}$ 在第一象限交 Γ 於 A 點。若 P 為曲線段 OA 上一點，且以 P 為切點的切線與 $\overline{OA}$ 平行，則 $\dfrac{弓形APO的面積}{\Delta APO的面積}=$_________ 。

12. 在整數列 $\left[\dfrac{1^2}{103}\right],\left[\dfrac{2^2}{103}\right],\left[\dfrac{3^2}{103}\right],\cdots,\left[\dfrac{k^2}{103}\right]\cdots,\left[\dfrac{103^2}{103}\right]$ 中，共有_________個互不相等的整數 (其中符號$[\ ]$為高斯符號) 。

三、計算證明題 (每題 10 分，共 40 分)

1. 已知橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的焦點為 F_1,F_2 ，直線 L 通過 F_1 且與橢圓交於 A,B 兩點，

   (1) 求 ΔF_2AB 的周長。(1 分)

   (2) 求 ΔF_2AB 面積的最大值。(9 分)

2. 已知對所有的實數 x，不等式 $\left((\log_3 m)^2-\log_3(27m^2)\right)x^2-(\log_3 m-3)x-1<0$ 恆成立，則實數 m 的取值範圍為何?

3. 請問：函數 $f(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ 是不是週期函數？若是，請證明；若不是，也請證明。

4. 設甲袋原有 $k-1\left(k\geq 2\right)$ 個白球與 1 個黑球，而乙袋原有 k 個白球。今先自甲袋取一球放入乙袋中，再自乙袋取一球放入甲袋中，這動作我們稱之為一局。對每個正整數 n ，令 P_n 表示 n 局後黑球仍在甲袋的機率。

   (1)求 P_2 。(2 分)

   (2)求 P_n 。(6 分)

   (3)利用(1)的結果，求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ 的值。(2 分)