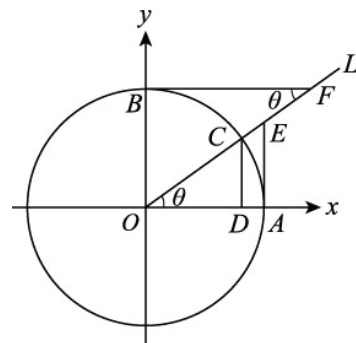


臺北市立大安高級工業職業學校 103 學年度第 1 次教師甄選
【數學科】筆試試題

- 作答說明：1. 請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號。
2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3. 作答時間 90 分鐘。
4. 本試題共四大題，依各題配分計分，滿分 100 分。
5. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。
6. 請於所發放的答案卷內完成作答，不加發答案卷。
7. 本科作答時，禁止使用計算機。

第一部份：計算題(每題 7 分，共計 42 分)

- $f(x)$ 為一多項式且 $(x-1)f(x+1)=(x+2)f(x)$ ，求所有可能的 $f(x)$ 。
- 設 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，求 $\tan^2 x - 9 \tan x + 1 = 0$ 之各根總和為多少？
- 如右圖，坐標平面上以原點 O 為圓心作單位圓，分別交兩軸正向於 A 、 B 兩點，過 O 點的直線 L 交圓於 C 點。過 A 、 B 分別作圓的切線交 L 於 E 、 F 兩點，過 C 點作 x 軸垂線交 x 軸於 D 點。設 $\angle COD = \theta$ ， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，若 $\overline{CD} + \overline{OD} = \frac{4}{3}$ ，求 $\overline{BF} + \overline{FO} + \overline{OE} + \overline{EA} = ?$
- 阿凡達政府長期追蹤國民的經濟狀況，依標準將全體國民分成高收入、中收入與低收入三類。經統計發現：高收入的人口中，每年有八成仍是高收入，有一成變成中收入，一成變成低收入；中收入的人口中，每年有三成變為高收入，五成仍是中收入，兩成變成低收入；低收入的人口中，每年有兩成變為高收入，兩成變成中收入，六成仍是低收入。請問，長期而言，中收入的人口佔全體國民的幾分之幾？
- 求 $\frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + \frac{4^2}{3^4} + \frac{5^2}{3^5} + \dots = ?$
- 若 $b > a > 0$ ，解不等式 $\log_{0.5}[a^{2x} - (ab)^x - 2b^{2x} + 1] > 0$ (以 a 、 b 表示之)。



第二部份：偵錯題(每題 7 分，共計 21 分)

說明：此大題為本校學生常使用的錯誤解法，請您觀察並找出學生的錯誤，在答案卷上指出學生錯誤的關鍵或思考不完備的解題步驟，同時寫出此題目正確的詳解。

- 題目：將 5 枝相同的紅筆及 4 枝相同藍筆全部分給 3 位學生，若每位學生至少分到一枝筆，則共有多少種不同的分法？

天兵學生甲：3 位學生先各分得 1 枝筆，則可能情況有四類

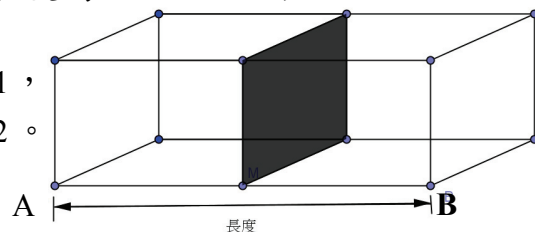
$$\begin{aligned} & (\text{紅, 紅, 紅}) + (\text{紅, 紅, 藍}) + (\text{紅, 藍, 藍}) + (\text{藍, 藍, 藍}) \\ & = (H_2^3 \circlearrowleft H_4^3) + (C_1^3 \circlearrowleft H_3^3 \circlearrowleft H_3^3) + (C_2^3 \circlearrowleft H_4^3 \circlearrowleft H_2^3) + (H_5^3 \circlearrowleft H_1^3) = 90 + 300 + 270 + 63 = 723. \end{aligned}$$

- 題目：某貨運公司託運個人物件的規定如下：
物件必須為長方體及其橫截面需為正方形，且限制物件圍長(即黑色正方形周長)加上 \overline{AB} 長度之和需等於 108 公分，試問可託運物件之最大體積為何？

天兵學生乙：令黑色正方形之邊長為 x 公分，則 \overline{AB} 長度為 $108 - 4x$ 公分，

$$\begin{aligned} & \text{則體積 } V(x) = x^2(108 - 4x) = -4x^3 + 108x^2, \\ & \text{利用微分 } V'(x) = -12x^2 + 216x = -12(x - 9)^2 + 12 \cdot 81, \\ & \text{因此當 } x = 9 \text{ 時, } \text{Max} V(9) = 9^2 \circlearrowleft (108 - 4 \cdot 9) = 5832. \end{aligned}$$

尚有試題，請接續作答
第 1 頁，共 2 頁



9. 題目：一袋中 5 紅球、4 白球，今從袋中任意取出兩球，若兩球皆為紅色則可得 20 元，若兩球皆為白色則可得 10 元，若兩球異色則 0 元，設隨機變數 X 表示自袋中隨意取出兩球可得的金額，則隨機變數 X 的變異數為何？

天兵學生丙： $P(X=20)=\frac{C_2^5}{C_2^9}=\frac{5}{18}$ ， $P(X=10)=\frac{C_2^4}{C_2^9}=\frac{1}{6}$ ，

Q $E(X)=20\times\frac{5}{18}+10\times\frac{1}{6}=\frac{65}{9}$

$\therefore Var(X)=\frac{5}{18}(20-\frac{65}{9})^2+\frac{1}{6}(10-\frac{65}{9})^2=\frac{34000}{729}$ 。

第三部份：解釋說明題(每題 8 分，共計 16 分)

說明：此大題為本校用功學生學習數學時，在數學叢書上看到的解答，但無法參透其中的意涵，請您依照所附解答內容，在答案卷上說明這些解法背後的思考模式或引用高中數學相關定理、性質…等，以便讓本校用功學生能充分了解。

10. 題目：設 z_1 與 z_2 為 $7+24i$ 之平方根，求 $|z_1-z_2|=?$

解答： $2\sqrt{\sqrt{7^2+24^2}}=10$ 。

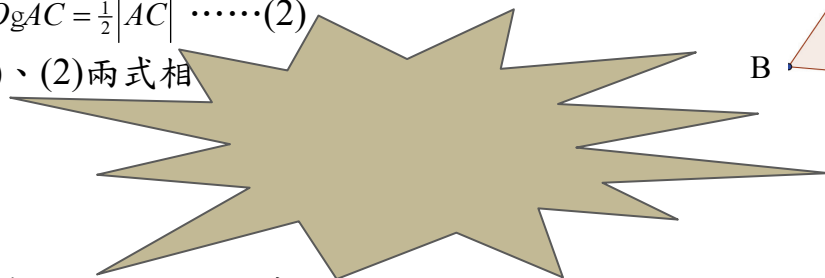
11. 題目：以向量內積性質，證明三角形之三中垂線交於同一點。

解答：設 O 為 \overline{AB} 與 \overline{AC} 之兩中垂線之交點，則

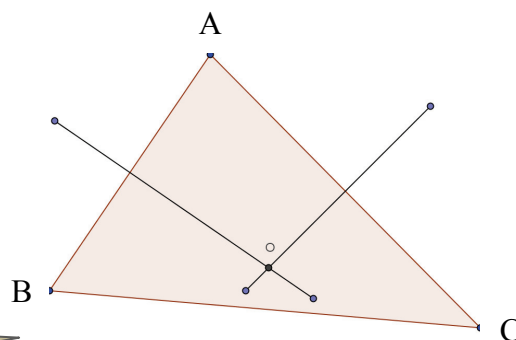
$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2$ ……(1)

且 $\vec{AO} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} |\vec{AC}|^2$ ……(2)

將(1)、(2)兩式相



因後半部分證明被油漬毀損，請您協助完成剩下證明。



第四部份：問答題(每題 7 分，共計 21 分)

12. 請分別寫出拋物線、橢圓和雙曲線在生活中的應用。
13. 圓面積 $r^2\pi$ 與圓周長 $2\pi r$ 有導數的關係，球體積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 與球表面積 $4\pi r^2$ 亦同。請以微積分的觀點解釋，讓學生能充分了解。
14. 當您在教學時，在臺上講得口沫橫飛，臺下學生卻昏昏欲睡，您會採取什麼有效的行動或策略來吸引學生的注意？試以本校學生為對象，寫一份約 5 分鐘的教案，內含一段與高中職數學課程有關的問題、謎語、笑話、故事或生活經驗。

試題結束