

臺北市立明倫高級中學 99 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試解答

<注意> 共有 10 題，請標明題號，將計算過程及答案寫在答案卷上！

1. 重複組合 (H) 轉換成組合 (C) 的公式如何推導？請以 H_5^4 (或 $H(4,5)$) 為例說明。
2. 將兩變量的 n 組數值資料 $(x_i, y_i), i=1, 2, 3, \dots, n$ ，進行二維資料分析。已知 x 的平均數 $\bar{X} = 3$ ，標準差 $S_x = 1$ ， y 的標準差 $S_y = 5$ ，(1) 若 Y 對 X 的迴歸(最小平方)直線為 $y = 4x + 6$ ，求此二變量之相關係數 r_{xy} ？(2) 若將資料分別轉換為 P, Q ，其中 $p_i = -2x_i + 3, q_i = 3y_i - 2, i=1, 2, 3, \dots, n$ ，求此二變量 P 與 Q 之相關係數 r_{PQ} ？(3) 求 Q 對 P 的迴歸直線？
3. 設 A 袋中有 2 個 10 元硬幣， B 袋中有 3 個 5 元硬幣。同時從 A 袋中任取一個硬幣與 B 袋中任取一個硬幣互換，若這樣的互換過程進行 3 次，求 (1) A 袋中 10 元硬幣恰好是一個的機率？(2) B 袋中期望金額是多少元？
4. 某次數學期末考共 100 題是非題，答對 1 題得 1 分，答錯倒扣 $\frac{1}{4}$ 分，已知小華確定會作答的只有 64 題，其他 36 題隨便亂猜，則小華此次考試分數可達到 85(含)分以上的機率是多少？(假設二項分配會近似常態分配)
5. 平面坐標系上兩個函數圖形 $y = f(x) = \sqrt{x}$ ， $y = g(x) = \frac{x}{2}$ 所圍成的區域假設為 R ，試分別求出將 R
(1) 繞 x 軸 (2) 繞 y 軸 一圈所得之旋轉體體積？
6. (1) 請證明 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 。(2) 用 (1) 的結果求正弦函數的微分，即 $\frac{d}{dx} \sin x = ?$
7. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ，試利用矩陣的對角線化方法求 A^n ，其中 n 為自然數。
8. (1) 試敘述微分的均值定理 (Mean Value Theorem)，(2) 求值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = ?$ (其中 e 為自然對數的底)
9. 設函數 $f: [1, 3] \rightarrow R$ 定義為 $f(x) = \int_1^x \frac{1}{[t]} dt$ ，其中 $[t]$ 為高斯整數(小於等於 t 的最大整數)，
(1) f 在 $x = 2$ 處是否連續？ (2) f 在 $x = 2$ 處是否可微分？
10. 求值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \frac{n}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = ?$

答案：

1. C_5^8

2. (1) 0.8 (2) -0.8 (3) $q = -6p + 34$

3. (1) $\frac{23}{36}$ (2) $\frac{505}{36}$ 元

4. $2.5\% = 0.025$

5. (1) $\frac{8\pi}{3}$ (2) $\frac{64\pi}{15}$

6. (1) 略 (2) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

7. $A^n = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n & -2 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \\ -3 \cdot 4^n + 3 \cdot (-1)^n & 2 \cdot 4^n + 3 \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$

8. (1) Mean Value Theorem :

若函數 $y = f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 連續且在開區間 (a, b) 可微，則存在 c 介於 a, b 之間使的 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(2) 1

9. Ans : (1) 是 (2) 否

10. $\frac{\pi}{4}$