2008 NTU CSIE 97 台大資工

題目： $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ ， $x^2+y^2+z^2=1$ ，求 $\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}$ 最大值。

參考解答：

不失一般性，令 $x\leq y\leq z$ ，

則 $S=\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\leq\frac{x}{1+xy}+\frac{y}{1+xy}+\frac{z}{1+xy}=\frac{x+y+z}{1+xy}$ ，

$$S^2\leq\frac{(x+y+z)^2}{1+2xy+x^2y^2}=\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{x^2+y^2+z^2+2xy+x^2y^2}=1+\frac{2yz+2zx-x^2y^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+x^2y^2}$$

$$=2+\frac{-x^2-y^2-z^2-2xy+2yz+2zx-2x^2y^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+x^2y^2}=2-\frac{(x+y-z)^2+2x^2y^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+x^2y^2}$$

$$\leq 2$$

得 $S=\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\leq\sqrt{2}$ ，知 S 有上界 $\sqrt{2}$ ，

考慮不等式之等號成立條件如下：

$$\frac{x}{1+yz}=\frac{x}{1+xy},\frac{y}{1+zx}=\frac{y}{1+xy},x+y-z=0,xy=0,x\leq y\leq z,x^2+y^2+z^2=1$$ ，

取 $x=0, y=z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 可符合條件，故 S 最大值 $\sqrt{2}$ 。