2014 第 65 屆 AMC12 試題

1. 試問$10\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)^{-1}$之值爲何？

   (A) 3　(B) 8　(C) $\frac{25}{2}$　(D) $\frac{170}{3}$　(E) 170　【2014AMC12】

答：(C)

解：所求$=10\times\left(\frac{5+2+1}{10}\right)^{-1}=10\times\frac{10}{8}=\frac{25}{2}$

2. 某電影院兒童票價是成人票價的一半。若 5 位成人和 4 位兒童的票價總和爲 24.5 美元，則 8 位成人與 6 位兒童的票價的總和爲多少美元？

   (A) 35　(B) 38.5　(C) 40　(D) 42　(E) 42.5　【2014AMC12】

答：(B)

解：5 位成人和 4 位兒童的票價（亦即 14 位兒童的票價）總和爲 24.5 美元

則 8 位成人與 6 位兒童的票價（亦即 22 位兒童的票價）總和$24.5\times\frac{22}{14}=38.5$

3. 阿福沿著某條街道行走，這條街道上共有四間房子排成一列，每間都漆著不同的顏色。已知他先經過橘色的房子後才知道紅色的房子，且先經過藍色的房子後才經過黄色的房子。若藍色的房子並不是緊鄰黄色的房子，則這四間房子可能排列的順序共有多少種？

   (A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　(E) 6　【2014AMC12】

答：(B)

解：$\underbrace{\frac{4!}{2!\times2!}}_{\text{橘紅次序不變 藍黄次序不變}}-\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{橘紅次序不變 藍黄相鄰}}=6-3=3$

4. 設a頭乳牛在c天内產了b加侖的牛奶。按此比例，d頭乳牛在e天内可以生產多少加侖的牛奶？

   (A) $\frac{bde}{ac}$　(B) $\frac{ac}{bde}$　(C) $\frac{abde}{c}$　(D) $\frac{bcde}{a}$　(E) $\frac{abc}{de}$　【2014AMC12】

答：(A)

解：每天每頭牛可產$\frac{b}{ac}$加侖牛奶，故所求爲$de\times\frac{b}{ac}$加侖

5. 某次代數測驗，有10% 的學生成績是 70 分，有35% 的學生成績是 80 分，有30% 的學生成績是 90 分，其餘的學生成績是 100 分。試問這次測驗學生成績的平均數與中位數相差多少分？

   (A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5　【2014AMC12】

答：(C)

解：平均數$=70\times10\%+80\times35\%+90\times30\%+100\times25\%=7+28+27+25=87$

中位數$=90$
兩者相差 3 分

6. 將某二位數的個位數字與十位數字對調得到一個新的二位數，
若原數與新數的差等於原數個位數字與十位數字和的 5 倍，則原數與新數之和爲多少？
(A) 44　(B) 55　(C) 77　(D) 99　(E) 110　【2014AMC12】

答：(D)
解：原數$10a+b$，新數$10b+a$，其中$a,b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
依題意$(10a+b)-(10b+a)=5(a+b)\ \Rightarrow 2a=7b$，故$a=7$、$b=2$
則原數與新數之和爲$72+27=99$

7. 若某等比數列的前三項爲$\sqrt{3},\sqrt[3]{3},\sqrt[6]{3}$，則第四項爲何？
(A) 1　(B) $\sqrt[7]{3}$　(C) $\sqrt[8]{3}$　(D) $\sqrt[9]{3}$　(E) $\sqrt[10]{3}$　【2014AMC12】

答：(A)
解：等比數列的前三項爲$3^{\frac{1}{2}},3^{\frac{1}{3}},3^{\frac{1}{6}}$，表公比爲$3^{-\frac{1}{6}}$，故第四項爲$3^0=1$

8. 有位顧客想買某個器具，他有三張不同的折價券，但只可以用其中一張：
折價券 1：如果訂價至少 50 美元，可以少付訂價的10%；
折價券 2：如果訂價至少 100 美元，可以少付 20 美元；
折價券 3：如果訂價超過 100 美元，可以少付超過 100 美元部分的18%
下列哪一個訂價，使用折價券 1 比使用折價券 2、折價券 3 能省更多的錢？
(A) 179.95 美元　(B) 199.95 美元　(C) 219.95 美元
(D) 239.95 美元　(E) 259.95 美元　【2014AMC12】

答：(C)
解：$\begin{cases} a\times 90\%<a-20 \\ a\times 90\%<100+(a-100)\times 82\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>200 \\ a<225 \end{cases}$

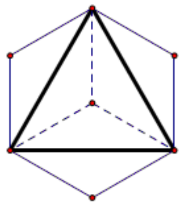
9. 由a開始連續五個正整數，其平均數爲b。
試問由b開始連續五個正整數的平均數爲何？
(A) $a+3$　(B) $a+4$　(C) $a+5$　(D) $a+6$　(E) $a+7$　【2014AMC12】

答：(B)
解：$b=\dfrac{(a)+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)}{5}=a+2$
所求$=\dfrac{(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6)}{5}=a+4$
或所求$=\dfrac{(b)+(b+1)+(b+2)+(b+3)+(b+4)}{5}=b+2=a+2+2=a+4$

10. 以邊長爲 1 的正三角形的三邊爲底向外做三個全等的等腰三角形。
若三個等腰三角形面積和等於此正三角形的面積，則等腰三角形的一腰長爲多少？
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　【2014AMC12】

答：(B)

解：



11. 大衛從家裡開車到機場搭飛機。
第一個小時他開了 35 公里，他發現若仍以這樣的速率開車，他將會晚一小時抵達機場。
於是他在剩下的路程中，時速增加 15 公里，結果他反而提早了 30 分鐘抵達機場。
試問機場與他家的距離爲多少公里？

(A) 140 (B) 175 (C) 210 (D) 245 (E) 280 【2014AMC12】

答： (C)

解：令原預定花費時間爲 t 小時

故總路成爲 $35\times(t+1)=35\times1+50\times(t-1.5)\ \Rightarrow\ t=5$

則總路程爲 $35\times6=210$

12. 兩圓交於 A、B 兩點。若兩段劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 對兩圓的圓心角分別爲 30° 與 60°，
則大圓面積比小圓面積的比值爲多少？

(A) 2 (B) $1+\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $2+\sqrt{3}$ (E) 4 【2014AMC12】

答：(D)

解：由正弦定律知 $\dfrac{R_{大}}{\sin30^\circ}=\dfrac{R_{小}}{\sin15^\circ}$

大圓面積比小圓面積的比值 $=\dfrac{\sin^2 30^\circ}{\sin^2 15^\circ}=\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\right)=2+\sqrt{3}$

13. 某民宿有 5 間房間，每間房門有不同的顏色。
某天有 5 個朋友到達此民宿要住宿一夜，且當天沒有其他的旅客。
這些朋友們可以依他們的意願住任何一間房，但每個房間不能住超過 2 人。
試問民宿經營者總共有多少種方法安排他們住宿？

(A) 2100 (B) 2220 (C) 3000 (D) 3120 (E) 3125 【2014AMC12】

答：(B)

解：$\begin{cases}(2,2,1,0,0)\Rightarrow C^5_2C^3_2C^1_1\times\dfrac{5!}{2!2!}=900\\(2,1,1,1,0)\Rightarrow C^5_2C^3_1C^2_1C^1_1\times\dfrac{5!}{3!}=1200\\(1,1,1,1,1)\Rightarrow C^5_1C^4_1C^3_1C^2_1C^1_1\times\dfrac{5!}{5!}=120\end{cases}$，合計 2220 種

14. 設 $a<b<c$ 爲三個整數，使得 a,b,c 成等差數列，且 a,c,b 成等比數列。
試問 c 最小可能的值爲何？
(A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6 【2014AMC12】

答：(C)

解：$\begin{cases} a+c=2b \\ ab=c^2 \end{cases} \Rightarrow (2b-c)b=c^2 \Rightarrow 2b^2-bc-c^2=(2b+c)(b-c)=0$

因爲 $a<b<c$，故 $c=-2b$、$a=4b$，且 $4b<b<-2b$

顯然 b 爲負。則當 b 最大時，$-2b$ 最小。取 $b=-1$，故 $c=2$。

15. 一個五位數的**迴文數**是一個形如 $abcba$ 正整數，其中 a 不爲 0。
若 S 爲所有五位數的迴文數之總和，則 S 各位數字的和爲多少？
(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 45 【2014AMC12】

答：(B)

解：$(10000+20000+30000+\cdots+90000)\times10\times10=45000000$

$(1000+2000+3000+\cdots+9000)\times9\times10=4050000$

$(100+200+300+\cdots+900)\times9\times10=405000$

$(10+20+30+\cdots+90)\times9\times10=40500$

$(1+2+3+\cdots+9)\times10\times10=4500$

$S=49500000$，故 S 各位數字的和爲 $4+9+5=18$

16. 考慮 $(8)\times(888\cdots8)$ 兩項的乘積，其中第二項是 k 位數，
若乘積爲一整數，其各位數字的和爲1000，則 k 是多少？
(A) 901 (B) 911 (C) 919 (D) 991 (E) 999 【2014AMC12】

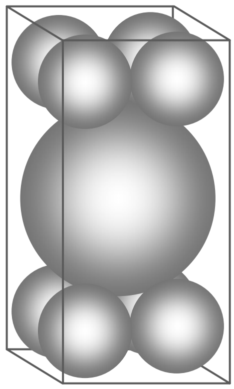
答：(D)

解：原式 $=64\times(1)\times\underbrace{(111\cdots1)}_{k\text{位}}$

因爲 $64\times11=704$、$64\times111=7104$、$64\times1111=71104$、......

所以 $64\times\underbrace{111\cdots1}_{991\text{位}}=7\underbrace{11\cdots1}_{989\text{個}}04$，滿足各位數字和爲 1000

17. 一個 $4\times4\times h$ 的長方體盒子內
裝著一個半徑爲2的大球及8個半徑爲1的小球。
若每個小球都與盒子的三面相切，且大球與每個小球相切，
如圖所示，則 h 之值爲何？
(A) $2+2\sqrt{7}$ (B) $3+2\sqrt{5}$ (C) $4+2\sqrt{7}$
(D) $4\sqrt{5}$ (E) $4\sqrt{7}$ 【2014AMC12】



答：(A)

解：$\underbrace{1+2+2+1}_{\text{貫穿中心之兩小一大球球心連線長}}=\underbrace{\sqrt{2^2+2^2+(h-2)^2}}_{\text{以上下八小球球心所連成之長方體之對頂角線長}}$，故 $h=2+2\sqrt{7}$

18.使函數 $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{16}}x\right)\right)\right)\right)$有意義所有可能 x 的範圍是在一個長度爲 $\frac{m}{n}$ 的區間，其中 m ，n 爲互質的正整數。試問 $m+n$ 之值爲何？

(A) 19 (B) 31 (C) 271 (D) 319 (E) 511 【2014AMC12】

$\boxed{答}$：(C)

$\boxed{解}$：$\log_4\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{16}}x\right)\right)\right)>0=\log_4 1$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{16}}x\right)\right)>1=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \log_{16}1=0<\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{16}}x\right)<\frac{1}{4}=\log_{16}2$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{16}=1<\log_{\frac{1}{16}}x<2=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{256} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{16}>x>\frac{1}{256}$$

x 的範圍區間長度爲 $\frac{m}{n}=\frac{15}{256}$ ，故 $m+n=15+256=271$

19.若恰有 N 個有理數 k 滿足 $\left|k\right|<200$ 且 $5x^2+kx+12=0$ 至少有一個整數解 x ，則 N 之值爲何？

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48 (E) 78 【2014AMC12】

$\boxed{答}$：(E)

$\boxed{解}$：由 $5x^2+kx+12=0$ 可得 $k=-5x-\frac{12}{x}$ ，顯然 $x\neq 0$ ，

則 $\left|k\right|=\left|-5x-\frac{12}{x}\right|=\left|5x+\frac{12}{x}\right|<200 \quad \Rightarrow \quad \left|x\right|<40 \quad \Rightarrow \quad \left|x\right|\leq 39$

故 $\begin{cases} x=1 \Rightarrow k=-17 \\ x=2 \Rightarrow k=-16 \\ x=3 \Rightarrow k=-19 \\ x=4 \Rightarrow k=-23 \\ \dots \\ x=39 \Rightarrow k=-\frac{2539}{13}=-195.\cdots \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow k=17 \\ x=-2 \Rightarrow k=16 \\ x=-3 \Rightarrow k=19 \\ x=-4 \Rightarrow k=23 \\ \dots \\ x=-39 \Rightarrow k=\frac{2539}{13}=195.\cdots \end{cases}$

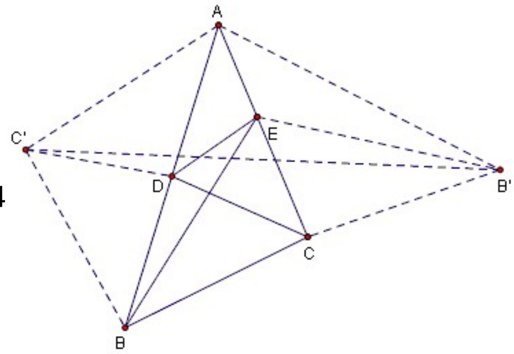
20. 在 ΔBAC 中，$\angle BAC=40^\circ$、$\overline{AB}=10$、$\overline{AC}=6$。
若點 D、E 分別在 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上，則 $\overline{BE}+\overline{DE}+\overline{CD}$ 最小可能的值爲何？
(A) $6\sqrt{3}+3$　(B) $\dfrac{27}{2}$　(C) $8\sqrt{3}$　(D) 14　(E) $3\sqrt{3}+9$　【2014AMC12】

答：(D)

解：B 關於 $\overrightarrow{AC}$ 之對稱點爲 B'、C 關於 $\overrightarrow{AB}$ 之對稱點爲 C'

所求即 $\overline{B'C'}=\sqrt{\overline{AB'}^2+\overline{AC'}^2-2\overline{AB'}\,\overline{AC'}\cos 120^\circ}$

$=\sqrt{10^2+6^2-2\times 10\times 6\times \dfrac{-1}{2}}=\sqrt{196}=14$



21. 對每一個實數 x，$[x]$ 表不大於 x 的最大整數，並設 $f(x)=[x]\left(2014^{x-[x]}-1\right)$，
已知滿足 $1\le x<2014$ 且 $f(x)\le 1$ 所有的 x 所成的集合是一些彼此不相交區間的聯集，
試問這些區間長度的和爲何？
(A) 1　(B) $\dfrac{\log 2015}{\log 2014}$　(C) $\dfrac{\log 2014}{\log 2013}$　(D) $\dfrac{2014}{2013}$　(E) $2014^{\frac{1}{2014}}$　【2014AMC12】

答：(A)

解：當 $x=1+\alpha$，$0\le\alpha<1$，則 $f(x)=1\times\left(2014^{\alpha}-1\right)\le 1 \Rightarrow 2014^{\alpha}\le 2 \Rightarrow \alpha\le\log_{2014}2$

故 $0\le\alpha\le\log_{2014}2$，此區間長度爲 $\log_{2014}2$

當 $x=2+\alpha$，$0\le\alpha<1$，則 $f(x)=2\times\left(2014^{\alpha}-1\right)\le 1 \Rightarrow 2014^{\alpha}\le\dfrac{3}{2} \Rightarrow \alpha\le\log_{2014}\dfrac{3}{2}$

故 $0\le\alpha\le\log_{2014}\dfrac{3}{2}$，此區間長度爲 $\log_{2014}\dfrac{3}{2}$

當 $x=3+\alpha$，$0\le\alpha<1$，則 $f(x)=3\times\left(2014^{\alpha}-1\right)\le 1 \Rightarrow 2014^{\alpha}\le\dfrac{4}{3} \Rightarrow \alpha\le\log_{2014}\dfrac{4}{3}$

故 $0\le\alpha\le\log_{2014}\dfrac{4}{3}$，此區間長度爲 $\log_{2014}\dfrac{4}{3}$

....

當 $x=2013+\alpha$，$0\le\alpha<1$，

則 $f(x)=2013\times\left(2014^{\alpha}-1\right)\le 1\Rightarrow 2014^{\alpha}\le\dfrac{2014}{2013}\Rightarrow\alpha\le\log_{2014}\dfrac{2014}{2013}$

故 $0\le\alpha\le\log_{2014}\dfrac{2014}{2013}$，此區間長度爲 $\log_{2014}\dfrac{2014}{2013}$

則總區間長度

爲 $\log_{2014}2+\log_{2014}\dfrac{3}{2}+\log_{2014}\dfrac{4}{3}+\cdots+\log_{2014}\dfrac{2014}{2013}=\log_{2014}2014=1$

22. 已知5^{867}是介於2^{2013}與2^{2014}之間。試問有多少組整數數對(m,n)

滿足：$1\le m\le 2012$且$5^{n}<2^{m}<2^{m+2}<5^{n+1}$

(A) 278 (B) 279 (C) 280 (D) 281 (E) 282 【2014AMC12】

$\boxed{答}$：(B)

$\boxed{解}$：$2^{2013}<5^{867}<2^{2014}\Rightarrow 2013\log 2<867\log 5<2014\log 2\Rightarrow \dfrac{2013}{867}<\dfrac{\log 5}{\log 2}<\dfrac{2014}{867}$

而$5^{n}<2^{m}<2^{m+2}<5^{n+1}\Rightarrow n\log 5<m\log 2<(m+2)\log 2<(n+1)\log 5$

$\Rightarrow \dfrac{m+2}{n+1}<\dfrac{\log 5}{\log 2}<\dfrac{m}{n}$，故$\begin{cases}\dfrac{m+2}{n+1}\le\dfrac{2013}{867}\\ \dfrac{2014}{867}\le\dfrac{m}{n}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{2014n}{867}\le m\le\dfrac{2013(n+1)}{867}-2$

但$1\le m\le 2012$，故$\begin{cases}1\le\dfrac{2014n}{867}\\ \dfrac{2013(n+1)}{867}-2\le 2012\\ \dfrac{2014n}{867}\le\dfrac{2013(n+1)}{867}-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{867}{2014}\le n\\ n\le\dfrac{2014\times 867}{2013}-1\\ n\le 279\end{cases}$

$\Rightarrow 1\le n\le 279$

$\boxed{解}$：引理：任意兩個5的冪之間，僅能存在2個2的冪，或存在3個2的冪.

證明：(i) 若兩個5的冪之間只存在1個2的冪，

即$2^{q}<5^{p}<2^{q+1}<5^{p+1}<2^{q+2}$，

則$2^{q+2}>5^{p+1}=5^{p}\times 5>2^{q}\times 5$，顯然矛盾

(ii) 若兩個5的冪之間只存在4個2的冪，

即$2^{q}<5^{p}<2^{q+1}<2^{q+4}<5^{p+1}<2^{q+5}$，

則$5^{p+1}>2^{q+4}=2^{q+1}\times 8>5^{p}\times 8$，顯然矛盾

引理得證。

原題：可設兩個5的冪之間恰存在2個2的冪的有x組，恰存在3個2的冪的有y組，

則$\begin{cases}x+y=867\\ 2x+3y=2013\end{cases}$，故$\begin{cases}x=588\\ y=279\end{cases}$

23. 若$\dfrac{1}{99^{2}}=0.\overline{b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_{1}b_{0}}$，其中最短循環節的長度爲$n$，

則$b_{0}+b_{1}+\cdots+b_{n-1}$之值爲何？

(A) 874 (B) 883 (C) 887 (D) 891 (E) 892 【2014AMC12】

$\boxed{答}$：(B)

$\boxed{解}$：$\dfrac{1}{99}=0.01010101010101010101010101010101\cdots=0.\overline{01}$

$\dfrac{1}{99^{2}}=0.00010203040506070809010\cdots969799\cdots=0.\overline{00010203040506070809010\cdots969799}$

則$b_{0}+b_{1}+\cdots+b_{n-1}=20(0+1+2+\cdots+9)-9-8=900-17=883$

24. 設 $f_0(x)=x+|x-100|-|x+100|$，並對於所有的 $n\geq 1$，令 $f_n(x)=|f_{n-1}(x)|-1$。
試問有多少個 x 滿足 $f_{100}(x)=0$ ？
(A) 299　(B) 300　(C) 301　(D) 302　(E) 303　【2014AMC12】

答：(C)

解： $f_{100}(x)=|f_{99}(x)|-1=0 \Rightarrow |f_{99}(x)|=1 \Rightarrow f_{99}(x)=\pm 1$

$f_{99}(x)=|f_{98}(x)|-1 \Rightarrow |f_{98}(x)|=0,2 \Rightarrow f_{98}(x)=0,\pm 2$

$f_{98}(x)=|f_{97}(x)|-1 \Rightarrow |f_{97}(x)|=1,-1,3 \Rightarrow f_{98}(x)=\pm 1,\pm 3$

$f_{97}(x)=|f_{96}(x)|-1 \Rightarrow |f_{96}(x)|=0,2,-2,4 \Rightarrow f_{98}(x)=0,\pm 2,\pm 4$

可由數學歸納法得證：

$$|f_{100-2k}(x)|=0,2,4,...,2k \Rightarrow f_{100-2k}(x)=0,\pm 2,\pm 4,...,\pm 2k$$

故得：$|f_0(x)|=0,2,4,...,100 \Rightarrow f_0(x)=0,\pm 2,\pm 4,...,\pm 100$

(i) 當 $x>100$，$f_0(x)=x+x-100-x-100=x-200$

解得 $x=102,104,106,...,300$，共 100 解

(ii) 當 $-100\leq x\leq 100$，$f_0(x)=x-x+100-x-100=-x$

解得 $x=100,98,...,0,...,98,100$，共 101 解

(iii) 當 $x<-100$，$f_0(x)=x-x+100+x+100=x+200$

解得 $x=-102,-104,-106,...,-300$，共 100 解

合計 301 解

解：當 $x<-100$，$f_0(x)=x-x+100+x+100=x+200$

$f_0(-102)=98$、$f_1(-102)=97$、$f_2(-102)=96$、...、$f_{99}(-102)=-1$、$f_{100}(-102)=0$

$f_0(-104)=96$、$f_1(-104)=95$、$f_2(-104)=94$、...、$f_{99}(-104)=-1$、$f_{100}(-104)=0$

$f_0(-106)=94$、$f_1(-106)=93$、$f_2(-106)=92$、...、$f_{99}(-106)=-1$、$f_{100}(-106)=0$

......

$f_0(-200)=0$、$f_1(-200)=-1$、$f_2(-200)=0$、...、$f_{99}(-200)=-1$、$f_{100}(-200)=0$

$f_0(-202)=-2$、$f_1(-202)=1$、$f_2(-202)=0$、...、$f_{99}(-202)=-1$、$f_{100}(-202)=0$

$f_0(-204)=-4$、$f_1(-204)=3$、$f_2(-204)=2$、...、$f_{99}(-204)=-1$、$f_{100}(-204)=0$

......

$f_0(-296)=-96$、$f_1(-296)=95$、$f_2(-296)=94$、...、$f_{99}(-296)=-1$、$f_{100}(-296)=0$

$f_0(-298)=-98$、$f_1(-298)=97$、$f_2(-298)=96$、...、$f_{99}(-298)=-1$、$f_{100}(-298)=0$

$f_0(-300)=-100$、$f_1(-300)=99$、$f_2(-300)=98$、...、$f_{99}(-300)=1$、$f_{100}(-300)=0$

當 $-100\leq x\leq 100$，$f_0(x)=x-x+100-x-100=-x$

$f_0(-100)=100$、$f_1(-100)=99$、$f_2(-100)=98$、...、$f_{99}(-100)=1$、$f_{100}(-100)=0$

$f_0(-98)=98$、$f_1(-98)=97$、$f_2(-98)=96$、...、$f_{99}(-98)=-1$、$f_{100}(-98)=0$

$f_0(-96)=96$、$f_1(-96)=95$、$f_2(-96)=94$、...、$f_{99}(-96)=-1$、$f_{100}(-96)=0$

......

$f_0(-2)=2$、$f_1(-2)=1$、$f_2(-2)=0$、...、$f_{99}(-2)=-1$、$f_{100}(-2)=0$
$f_0(0)=0$、$f_1(0)=-1$、$f_2(0)=0$、...、$f_{99}(0)=-1$、$f_{100}(0)=0$
$f_0(2)=-2$、$f_1(2)=1$、$f_2(2)=0$、...、$f_{99}(0)=-1$、$f_{100}(0)=0$
......
$f_0(96)=-96$、$f_1(96)=95$、$f_2(96)=94$、...、$f_{99}(96)=-1$、$f_{100}(96)=0$
$f_0(98)=-98$、$f_1(98)=97$、$f_2(98)=96$、...、$f_{99}(98)=-1$、$f_{100}(98)=0$
$f_0(100)=-100$、$f_1(100)=99$、$f_2(100)=98$、...、$f_{99}(100)=1$、$f_{100}(100)=0$

當 $x>100$，$f_0(x)=x+x-100-x-100=x-200$
$f_0(102)=-98$、$f_1(102)=97$、$f_2(102)=96$、...、$f_{99}(102)=-1$、$f_{100}(102)=0$
$f_0(104)=-96$、$f_1(104)=95$、$f_2(104)=94$、...、$f_{99}(104)=-1$、$f_{100}(104)=0$
$f_0(106)=-94$、$f_1(106)=93$、$f_2(106)=92$、...、$f_{99}(106)=-1$、$f_{100}(106)=0$
......
$f_0(200)=0$、$f_1(200)=-1$、$f_2(200)=0$、...、$f_{99}(200)=-1$、$f_{100}(200)=0$
$f_0(202)=2$、$f_1(202)=1$、$f_2(202)=0$、...、$f_{99}(202)=-1$、$f_{100}(202)=0$
$f_0(204)=4$、$f_1(204)=3$、$f_2(204)=2$、...、$f_{99}(204)=-1$、$f_{100}(204)=0$
......
$f_0(296)=96$、$f_1(296)=95$、$f_2(296)=94$、...、$f_{99}(296)=-1$、$f_{100}(296)=0$
$f_0(298)=98$、$f_1(298)=97$、$f_2(298)=96$、...、$f_{99}(298)=-1$、$f_{100}(298)=0$
$f_0(300)=100$、$f_1(300)=99$、$f_2(300)=98$、...、$f_{99}(300)=1$、$f_{100}(300)=0$
故 $x=-300,-298,-296,...,-2,0,2,...,296,298,300$，共 301 解合於所求

25.若拋物線 P 的焦點爲 $(0,0)$ 且通過點 $(4,3)$ 與點 $(-4,-3)$，
則有多少個整數數對 (x,y) 在 P 上且滿足 $|4x+3y|\le 1000$？
(A) 38　(B) 40　(C) 42　(D) 44　(E) 46　【2014AMC12】

答：(B)
解：點 $(4,3)$ 與點 $(-4,-3)$ 關於原點對稱，故這兩點的連線段經過焦點 $(0,0)$
故兩點連線段的垂直平分線的是拋物線對稱軸，
且正焦弦長爲 10，焦距爲 5，則準線爲 $3x-4y\pm 25=0$，
這裡的正負號不妨取爲正號，否則將坐標系旋轉 $180°$，
由拋物線定義，可得 $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{|3x-4y+25|}{5}$，
即 $(4x+3y)^2=50(3x-4y)+625$，故知 $4x+3y=10k+5$...①，$k\in Z$
又 $|4x+3y|\le 1000$，亦即 $|10k+5|\le 1000$ $\Rightarrow -100.5\le k\le 99.5$ $\Rightarrow k=-100,-99,...,99$
又 $(10k+5)^2=50(3x-4y)+625$ $\Rightarrow 3x-4y=2k^2+2k-12$...②
由①②解聯立 $x=\dfrac{6k^2+46k-16}{25}$、$y=\dfrac{-8k^2+22k+63}{25}$，$x,y\in Z$
注意到當 $k=5t+2\ ,t\in Z$ 時，

$$x=\frac{6\left(25t^{2}+20t+4\right)+46\left(5t+2\right)-16}{25}=6t^{2}+14t+4$$

$$y=\frac{-8\left(25t^{2}+20t+4\right)+22\left(5t+2\right)+63}{25}=-8t^{2}-2t+3$$

可使 x 、 y 均爲整數

可知滿足條件的 $k=-98,-93,-88,...,97$ ，共有 40 個