103年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編授

第壹部分：選擇題（占60分）

一、單選題（占30分）

1. 請問下列哪一個選項等於$\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)$？

(1)$5\log\left(2^3\right)$　(2)$3\times5\log2$　(3)$5\log2\times\log3$

(4)$5\left(\log2+\log3\right)$　(5)$3^5\log2$　【103學測】

答：(5)（第一冊第三章對數--取對數，次方降作係數）

解：$\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)=3^5\cdot\log2$

2. 令$A(5,0,12)$、$B(-5,0,12)$為坐標空間中之兩點，

且令P為xy平面上滿足$\overline{PA}=\overline{PB}=13$的點。請問下列哪一個選項中的點可能為$P$？

(1)$(5,0,0)$　(2)$(5,5,0)$　(3)$(0,12,0)$　(4)$(0,0,0)$　(5)$(0,0,24)$　【103學測】

答：(4)（第四冊第一章空間座標--點到點的距離）

解：既然在xy平面，則$z=0$

$d\left((0,0,0),(5,0,12)\right)=d\left((0,0,0),(-5,0,12)\right)=13$

3. 在坐標平面上，以$(1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$及$(1,-1)$等四個點為頂點的正方形，

與圓$x^2+y^2+2x+2y+1=0$有幾個交點？

(1) 1個　(2) 2個　(3) 3個　(4) 4個　(5) 5個。　【103學測】

答：(2)（第三冊第二章圓）

解：圓$(x+1)^2+(y+1)^2=1$與正方形交於$(-1,0)$，$(0,-1)$

4. 請問滿足絕對值不等式$|4x-12|\le2x$的實數x所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 6　【103學測】

答：(4)（第一冊第一章數線）

解：$|4x-12|^2\le(2x)^2\quad\Rightarrow12x^2-96x+144\le0$

$\Rightarrow x^2-8x+12\le0\quad\Rightarrow(x-2)(x-6)\le0\quad\Rightarrow2\le x\le6$

5. 設$\left(1+\sqrt{2}\right)^6=a+b\sqrt{2}$，其中$a,b$為整數。請問$b$等於下列那一個選項？

(1)$C_0^6+2C_2^6+2^2C_4^6+2^3C_6^6$

(2)$C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$

(3)$C_0^6+2C_1^6+2^2C_2^6+2^3C_3^6+2^4C_4^6+2^5C_5^6+2^6C_6^6$

(4) $2C_1^6+2^2C_3^6+2^3C_5^6$

(5) $C_0^6+2^2C_2^6+2^4C_4^6+2^6C_6^6$ 【103 學測】

答：(2) **（第二冊第二章二項式定理）**

解：$\left(1+\sqrt{2}\right)^6=\left[C_0^6\left(\sqrt{2}\right)^6+C_2^6\left(\sqrt{2}\right)^4+C_4^6\left(\sqrt{2}\right)^2+C_6^6\right]$

$$+\left[C_1^6\left(\sqrt{2}\right)^5+C_3^6\left(\sqrt{2}\right)^3+C_5^6\left(\sqrt{2}\right)\right]$$

故 $b=C_1^6\times2^2+C_3^6\times2+C_5^6=C_5^6\times2^2+C_3^6\times2+C_1^6$

6. 某疾病可分爲兩種類型：
第一類占 70% ，可藉由藥物 A 治療，其每一療程的成功率爲 70% ，
且每一療程的成功與否互相獨立；
其餘爲第二類，藥物 A 治療方式完成無效。
在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次治療失敗的情況下，
進行第二次療程成功的條件機率最接近下列那一個選項？
(1) 0.25 (2) 0.3 (3) 0.35 (4) 0.4 (5) 0.45 【103 學測】

答：(2) **（第二冊第三章機率--條件機率、貝氏定理）**

解：
- 第一類 70%
  - 有效 70%
  - 無效 30%
    - 有效 70%
    - 無效 30%
- 第二類 30%
  - 有效 0%
  - 無效 100%
    - 有效 0%
    - 無效 100%

所求條件機率 $=\dfrac{70\%\times30\%\times70\%}{70\%\times30\%+30\%\times100\%}=\dfrac{0.147}{0.510}=\dfrac{49}{170}\fallingdotseq0.288\cdots$

二、多選題（占 30 分）

7. 設坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆爲整數的點稱爲格子點。請選出圖形上有格子點的選項。
(1) $y=x^2$ (2) $3y=9x+1$ (3) $y^2=-x-2$ (4) $x^2+y^2=3$ (5) $y=\log_9x+\dfrac{1}{2}$
【103 學測】

答：(1)(3)(5) **（綜合圖形）**

解：(1) $y=x^2$ 有格子點 $\left(t,t^2\right)$，$t\in Z$

(2) $3y=9x+1$ 無格子點

(3) $y^2=-x-2$ 有格子點 $\left(-2-t^2,t\right)$，$t\in Z$

(4) $x^2+y^2=3$ 無格子點

(5) $y=\log_9x+\dfrac{1}{2}$ 有格子點 $\left(3^{2t-1},t\right)$，$t\in Z$

8. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13}>3.5$　(2) $\sqrt{13}<3.6$　(3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$　【103 學測】

答：(1)(4)　**（第一冊第一章無理數）**

解：(1) $13>12.25$，故 $\sqrt{13}>3.5$

(2) $13>12.96$，故 $\sqrt{13}>3.6$

(3) $\left(\sqrt{13}\right)^2<\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)^2$，故 $\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$

(4) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)^2>\left(\sqrt{16}\right)^2$，故 $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$

(5) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)^2<6^2$，故 $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{10}$

9. 一物體由坐標平面中的點 $(-3,6)$ 出發，沿著向量 $\vec{v}$ 所指的方向持續前進，可以進入第一象限。請選出正確的選項。

(1) $\vec{v}=(1,-2)$　(2) $\vec{v}=(1,-1)$　(3) $\vec{v}=(0.001,0)$

(4) $\vec{v}=(0.001,1)$　(5) $\vec{v}=(-0.001,1)$　【103 學測】

答：(2)(3)(4)　**（第三冊第三章平面向量—斜率、方向向量、法向量）**

解：$(-3,6)$ 與 $(0,0)$ 所成斜率 -2

當向量代表之斜率大於 -2，且向右方前進，必過第一象限

(1) 恰過原點，不進入第一象限

(5) 向左上方，不進入第一象限

10. 設 $f(x)$ 爲實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$、$f(2)<0$、$f(3)>0$。令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$，請選出正確選項。

(1) $y=f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線

(2) $y=g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線

(3) $g(1)>f(1)$

(4) 在 $g(x)=0$ 在 1 與 2 之間恰有一個實根

(5) 若 α 爲 $f(x)=0$ 的最大實根，則 $g(\alpha)>0$　【103 學測】

答：(3)(4)　**（第一冊第二章多項函數—勘根定理）**

解：(1) 領導係數爲正，應爲開口向上

(2) 領導係數爲正，應爲開口向上

(3) $g(1)-f(1)=(-1)(-2)>0$

(4) $\left.\begin{array}{l} g(1)=f(1)+f(-1)(-2)>0 \\ g(2)=f(2)+0<0 \\ g(3)=f(3)+0>0 \end{array}\right\}$ 故 $g(x)=0$ 在 1 與 2 之間恰有一實跟

(5) $2<\alpha<3$，故 $g(\alpha)=0+(\alpha-2)(\alpha-3)<0$

11. 設 $a_1=1$ 且 a_1，a_2，a_3，⋯為等差數列。請選出正確的選項。

(1)若 $a_{100}>0$，則 $a_{1000}>0$　(2)若 $a_{100}<0$，則 $a_{1000}<0$

(3)若 $a_{1000}>0$，則 $a_{100}>0$　(4)若 $a_{1000}<0$，則 $a_{100}<0$

(5) $a_{1000}-a_{10}=10\left(a_{100}-a_1\right)$　【103 學測】

答：(2)(3)(5)　（第二冊第一章數列級數---等差）

解：(1) 不一定，當公差 $=\dfrac{-1}{100}$ 時，即為反例

(4) 不一定，當公差 $=\dfrac{-1}{100}$ 時，即為反例

12. 所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達(進行統計分析時，所有年齡以整數表示)。

下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，**<u>其中的年齡範圍有所重疊</u>**。

年齡範圍	35～44 歲	35～39 歲	40～44 歲	45～49 歲
失業率	12.66(%)	9.8(%)	13.17(%)	7.08(%)

請根據上表選出正確的選項。

(1)在上述四個年齡範圍中，以 40～44 歲的失業率為最高

(2) 40～44 歲勞動人數多於 45～49 歲勞動力人數

(3) 40～44 歲的失業率等於 $\left(\dfrac{13.17+7.08}{2}\right)\%$

(4) 35～39 歲勞動人數少於 40～44 歲勞動人數

(5)如果 40～44 歲的失業率降低，則 45～49 歲的失業率會升高　【103 學測】

答：(1)(4)　（第二冊第四章數據分析---平均數）

解：(1) 正確

(2) 不一定，必須考慮分母（即勞動力人數）

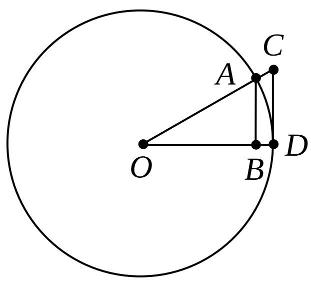
(3) 不一定，必須考慮分母（即勞動力人數）

(4) 正確（$\because 12.66\% \doteqdot \dfrac{15}{100}\times 9.8+\dfrac{85}{100}\times 13.17$）

(5) 不一定

第壹部分：選填題（占 40 分）

A. 設圓 O 之半徑為 24，$\overline{OC}=26$，$\overline{OC}$ 交圓 O 於 A 點，$\overline{CD}$ 切圓 O 於 D 點，B 為 A 點到 $\overline{OD}$ 的垂足，如右邊的示意圖。則 $\overline{AB}=$ ________。（化為最簡分數）　【103 學測】



答：$\dfrac{120}{13}$　（第三冊第一章三角---三角函數名稱由來）

解：$\sec\theta=\dfrac{\overline{OC}}{r}=\dfrac{26}{24}=\dfrac{13}{12}$，故 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$、$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

而 $\sin\theta=\dfrac{\overline{AB}}{r}\Rightarrow\dfrac{5}{13}=\dfrac{\overline{AB}}{24}\Rightarrow\overline{AB}=\dfrac{120}{13}$

B. 座標平面上，

若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 爲實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，

亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，

則 $a=$______，$b=$______。【103 學測】

答：$a=6$，$b=-9$（第一冊第二章一次函數、二次函數）

解：二次函數頂點由 $(0,0)$ 沿著直線平移到 $(2,12)$

故 $a=$ 斜率 $=\dfrac{12-0}{2-0}=6$，而直線 $y=6x+b$

$y=ax+b$ 與 $y=x^2$ 恰交於一點，故 $\begin{cases} y=6x+b \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-6x-b=0$ 恰有一解

則判別式 $=(-6)^2-4\times1\times(-b)=0 \Rightarrow b=-9$

C. 小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里。

今欲在此道路上蓋一家超級市場使其與 A、B 等距，

則此超級市場與 A 的距離須爲______公里。（化爲最簡根式）【103 學測】

答：$4\sqrt{3}$（第三冊第二章解析幾何）

解：令 $B(0,0)$、$A(6\sqrt{3},6)$、$M(x,0)$，而 $\overline{MA}=\overline{MB}$

$\Rightarrow \sqrt{(6\sqrt{3}-x)^2+6^2}=|x| \Rightarrow x=4\sqrt{3}$

D. 座標空間中有四點 $A(2,0,0)$、$B(3,4,2)$、$C(-2,4,0)$ 與 $D(-1,3,1)$。

若點 P 在直線 CD 上變動，則內積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最小可能值爲______。

（化爲最簡分數）【103 學測】

答：$\dfrac{5}{4}$（第四冊第二章空間中的直線與平面）

解：$\overleftrightarrow{CD}$ 上動點 $P(-2+t,4-t,t)$，$\overrightarrow{PA}=(4-t,t-4,-t)$，$\overrightarrow{PB}=(5-t,t,2-t)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3t^2-15t+20=3\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$，當 $t=\dfrac{5}{2}$ 時，有 $Min=\dfrac{5}{4}$

E. 設 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 爲兩個長度皆爲 1 的向量，

若 $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 的夾角爲 75°，則 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的內積爲______。（化爲最簡根式）

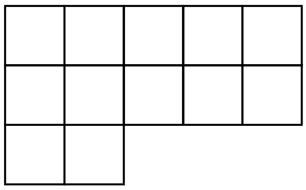
【103 學測】

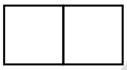
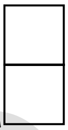
答：$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（第三冊第三章平面向量--向量合成、角平分向量、內積）

解：$\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 夾 75°，即 $\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 夾 150°（因爲 $\vec{u}+\vec{v}$ 是 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 的角平分向量）

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos150^\circ=1\times1\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

F. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。



今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即或。

則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有________種。【103 學測】

答：11（第二冊第二章排列組合--計數原理）

解：底二塊為橫，上二排直 $0\to 0$

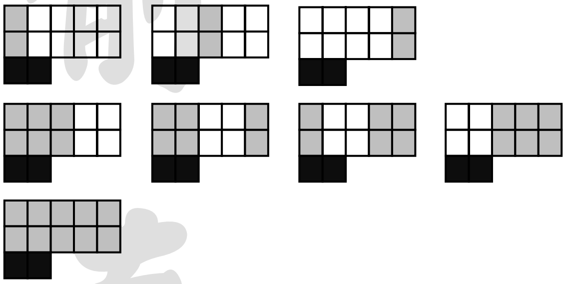
上二排直 $1\to 3$

上二排直 $2\to 0$

上二排直 $3\to 4$

上二排直 $4\to 0$

上二排直 $5\to 1$

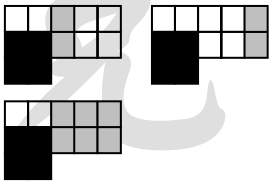


底二塊為直，上右二排直 $0\to 0$

上右二排直 $1\to 2$

上右二排直 $2\to 0$

上右二排直 $3\to 1$



共 11 種

G. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式（值）為 $\dfrac{5}{8}$。則 $a+d=$________。

（化為最簡分數）【103 學測】

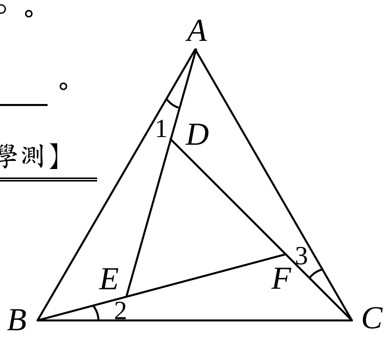
答：$\dfrac{13}{8}$（第四冊第三章矩陣--馬可夫矩陣）

解：$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{bmatrix}=ad-1+a+d-ad=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\ a+d=\dfrac{5}{8}+1=\dfrac{13}{8}$

H. 如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15^\circ$。

已知 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正三角形 DEF 的邊長為________。

（化為最簡根式）【103 學測】



答：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（第三冊第一章三角--正弦定律）

解：ΔABE 中 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow\ \overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}=\overline{AE}-\overline{BE}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$