

2014年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題

2013年 12月 8日

說明: 本試題共一頁七題, 每題七分。

將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。

答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。

答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入0。

- 一、(7分) 類似於平面座標系將西洋棋盤 8×8 的方格標記, 從左下方格 $(1, 1)$ 直到右上為 $(8, 8)$. 將 21 支 1×3 的長方型放置在棋盤上。(長方型的方格與棋盤的方格大小一致, 放置時可以水平或垂直, 不重疊也不超出, 而且彼此方格要對齊。) 如果西洋棋盤方格 (a, b) 是成功放置之後所留下的唯一空格, 稱之為虧格。試問下列數字之和

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots = \textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3},$$

其中 (a_i, b_i) 是所有可能的虧格; 如果沒有任何虧格存在, 請填答 “000”. Ans. 036.

- 二、(7分) 已知二項式係數 $\binom{111}{14}$ 是一個 18 位數: 210227xyz943268675, 其中的三個數字 xyz 因油漬汙染而看不清楚。試問 $x + z = \textcircled{4}\textcircled{5}$. Ans. 10

- 三、(7分) 給定一直角三角形 ABC, 其中 $\angle B = 90^\circ$. 在邊 \overline{BC} 上取一點 M 使得 $\overline{AB} = \overline{BM} = 12$, $\overline{DM} \parallel \overline{AB}$. 又點 N 為 \overline{BM} 的中點且 $\angle ADN = \angle BAD$.

試問: 三角形 DNM 的面積 = $\textcircled{6}\textcircled{7}$. Ans. 24

- 四、(7分) 設 x_0 為方程式 $x^3 + 3x^2 + 6x + 20 = 0$ 的實根, y_0 為方程式 $y^3 + 6y^2 + 15y - 2 = 0$ 的實根。試問 $x_0 + y_0 = \textcircled{8}\textcircled{9}$. Ans. -3

- 五、(7分) 考慮滿足以下條件的正整數數列 a_1, a_2, \dots, a_{10} :

(i) $a_{10} \leq 50$;

(ii) 對所有的 $k = 1, 2, \dots, 9$, 不等式 $a_{k+1} - a_k \geq k$ 均成立。

請問共有幾組數列 $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ 滿足上述條件? 答 $\textcircled{10}\textcircled{11}\textcircled{12}\textcircled{13}$. Ans. 1001

- 六、(7分) 某班有 15 位男同學、17 位女同學舉行冬季旅遊活動, 要在營火晚會時大家手牽手圍成一圈唱歌。令隨機變數 X 的取值為男女同學牽到手的對數。例如: 如果男生、女生都連續排在一起, 則 $X = 2$. 在每一種環狀排列出現的機率均等的情況下, 試問 X 的期望值等於多少?(化為最簡分數) 答 $\frac{\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}}{\textcircled{17}\textcircled{18}}$. Ans. $\frac{510}{31}$

- 七、(7分) 已知存在兩組以上的整數數對 (a, b, c) 滿足 $a \leq b \leq c$ 且

$$a + b + c = -3, a^3 + b^3 + c^3 - 20(a + 3)(b + 3)(c + 3) = 2013.$$

試問 $3a + b + 2c = \textcircled{19}\textcircled{20}\textcircled{21}$. Ans. -14

$$(a, b, c) = (-9, -1, 7), (-8, 0, 5)$$