

臺北市立中山女子高級中學 99 學年度第 1 次正式教師甄選

數學科目卷(作答時間 120 分鐘，本試題共 8 題，每題 15 分)

1. $f(x)=x^{20}+2x+1$ ，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式？

若面對(1)甲：高一上學期學生

(2)乙：高二下學期學生

(3)丙：高三下學期理組學生

請問你將會各自給予什麼的解？

請寫下你會個別給予的解題過程並略述其緣由？

2. 計算 $\frac{1}{\sin 15^\circ \sin 30^\circ} + \frac{1}{\sin 30^\circ \sin 45^\circ} + \frac{1}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin 150^\circ \sin 165^\circ} = ?$

3. 已知複數 $z_1=3+2i$ ，複數 $|z_2-11-4i|=3$ ，則對任意實數 α ，試求 $|z_1-\alpha|+|z_2-\alpha|$ 的最小值？

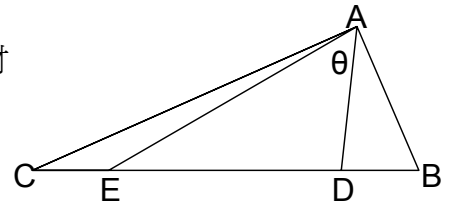
4. $a, b \in \mathbb{Z}$ ，試證明

(1) $x^2+10ax+5b-3=0$ 無整數解。

(2) $x^4+10ax+5b-3=0$ 無整數解。

5. 有一直角三角形 ABC ，已知 $\angle BAC=90^\circ$ ，且 D, E 為斜邊 \overline{BC} 上之兩點滿足 $\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=2:1:3:1$ ， $\angle EAD=\theta$ ，求 $\cos\theta=?$

試以至少三種不同作法解出上題，並指出運用到高中教材中的哪一單元的知識。



6. 若自然數 a 的各位數字之和為 7，則稱 a 是「吉祥數」，今將所有「吉祥數」由小到大排成一列； a_1, a_2, a_3, \dots ，若 $a_n=2005$ ，則 $a_{5n}=?$

7. 甲、乙二人在一場七戰四勝制的比賽中競爭，即丟贏四場的隊伍則獲得冠軍，若甲每一場勝乙的機率為 p ，則甲在此次比賽中獲勝的機率？

某位學生提出這樣的解法“ $C_4^7 p^4(1-p)^3$ ”，請問這位同學的解法有任何不妥之處嗎？並說明之。若你有其他的解法，請比較二者之間的差別。

8. 某人到遊樂場玩擲硬幣計分遊戲，遊戲時要一次擲出五個均勻硬幣。如果出現正面的個數少於出現反面的個數，就必須重擲，直到擲出正面的個數多於反面的個數為止。此時如果出現三個正面得 6 分，出現四個正面得 9 分，出現五個正面得 15 分，則此人玩此遊戲得分的數學期望值是幾分。