TRML 團體賽-2013

1.投擲一個公正骰子兩次，設出現點數分別是 m 和 n，則 $f(x)=-4x^2-mx+(5-n)$ 最大值不大於2的機率為______。

[解]： $f(x)=-4x^2-mx+(5-n)=-4(x+\frac{m}{8})^2+(5-n)+\frac{m^2}{16}$ $\therefore$最大值為 $\frac{m^2}{16}-n+5\le 2$，

$\Rightarrow m^2+48\le 16n$，滿足條件的 (m,n) 為 $n=4$ 時，$m=1\sim 4$；$n=5$ 時，$m=1\sim 5$；$n=6$ 時，$m=1\sim 6$.

$\therefore$機率為 $\frac{4+5+6}{6\times 6}=\frac{5}{12}$.

2.滿足方程式 $3x^2+7xy-2x-5y-35=0$ 的正整數解(x,y)中，$x+y$ 的最大值為______。

[解]：方程式可表示成 $y=-\frac{3x^2-2x-35}{7x-5}$，$x, y$ 為正整數，得 $-\frac{3x^2-2x-35}{7x-5}>0$，$x>0$

$\Rightarrow (3x^2-2x-35)(7x-5)<0$，$x>0$.不等式的解為 $\frac{5}{7}<x<\frac{1+\sqrt{106}}{3}$，$\therefore x$ 僅可能為1,2,3．代入方程式得 $(x,y)=(1,17),(2,3),(3,1)$，所以 $x+y$ 的最大值為 18.

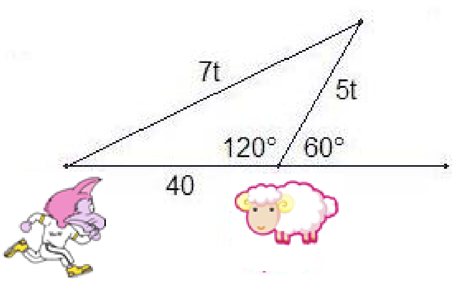
3.在一個廣大平坦的草原上，狐狸發現兔子在它正東方40公尺的地方，同時兔子也發現了狐狸，於是兔子往正東偏北60° 的方向，以5公尺/秒速率直線逃跑，聰明的狐狸知道沿著某條直線跑一定可以抓到兔子，於是狐狸同時開始以7公尺/秒沿著這條直線跑去追兔子，則狐狸最短需______秒可抓到兔子。

[解]：如圖所示，利用餘弦定理得：

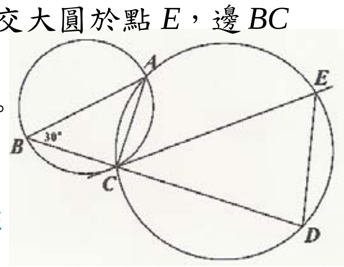
$49t^2=25t^2+1600-2\times 5t\times 40\times(-\frac{1}{2})$，

$3t^2-25t-200=0$，

$(t+5)(3t-40)=0$，故 $t=\frac{40}{3}$.



4.如圖，兩圓相交於 A 與 C 兩點，$\overline{AB}=6$ 為小圓的直徑，過 C 點小圓的切線交大圓於點 E，邊 $\overline{BC}$ 延長線交大圓於 D 點，若 $\overline{CD}=2\overline{BC}$ ，$\angle ABC$=30° ，則 $\frac{\Delta ABC面積}{\Delta ADE面積}=$______。

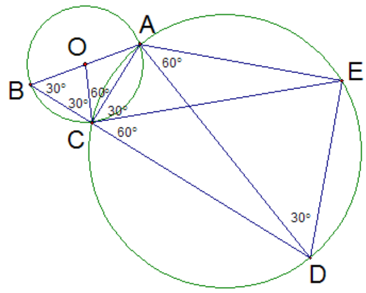


[解]：(i) $\because \overline{AB}$ 為直徑，所以 $\angle ACB=90^\circ$ ；

$\angle ACE=30^\circ$ (弦切角)；

所以 $\angle ECD=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

(ii) 由圓周角得 $\angle EAD=\angle ECD=60^\circ$，



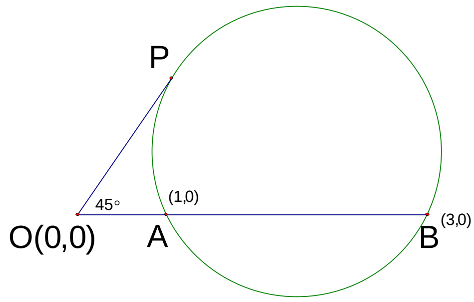
且 $\angle AED = 180° - \angle ACD = 90°$,
得 ΔAED 為 $30° - 60° - 90°$ 直角三角形.

(iii) 令 $\overline{AO} = a$, 可得 $\overline{AC} = a$, $\overline{CD} = 2\overline{BC} = 2\sqrt{3}a$,

因此 $\overline{AD} = \sqrt{13}a$. $\because \Delta ABC \sim \Delta ADE$, $\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \dfrac{2^2}{(\sqrt{13})^2} = \dfrac{4}{13}$.

5.坐標平面上，設點 A=(1,0)，B=(3,0)，Γ為通過點 A、B 的圓。已知Γ與直線 $y = x$ 相切於點 P，點 P 在第一象限，則點 P 的坐標為______。

[解]：由圓冪性質得



$\overline{OP}^2 = \overline{OA} \times \overline{OB} = 3$, $\overline{OP} = \sqrt{3}$.

又 $\angle POA = 45°$, 所以 $P = (\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2})$

6.滿足方程組 $\begin{cases} xy = z^2 \\ x + y + z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 336 \end{cases}$ ，則 $xyz =$______。

[解]：首先 $xy + yz + zx = \dfrac{12^2 - 336}{2} = -96$, 接著由條件 $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ xy + yz + zx = -96 \\ xyz = -z^3 \end{cases}$,

知 x, y, z 為 $t^3 - 12t^2 + 96t - z^3 = 0$ 的根.
把 z 代入得 $z^3 - 12z^2 + 96z - z^3 = 0$, 所以 $z = 0$ 或 8.

但 $z = 0$ 不滿足原方程式 $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 12 \\ x^2 + y^2 = 336 \end{cases}$, 因此 $z = 8$, 所求 $xyz = -z^3 = -8^3 = -512$.

7. 設數列 $< a_n >_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ，$n \geq 3$。已知 $\sum_{n=1}^{50} a_n$ =40，$\sum_{n=1}^{70} a_n$ =50，則 $\sum_{n=1}^{101} a_n$ 之值為______。

[解]：由遞迴關係式 $\begin{array}{rl} & a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \\ +) & a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3} \\ \hline & a_n = -a_{n-3} \end{array}$, 知此數列為 $a_1, a_2, a_3, -a_1, -a_2, -a_3, a_1, a_2, \ldots$

每六項循環一次, 且連續六項和等於 0.

故 $\sum_{n=1}^{50} a_n = a_1 + a_2 = 40$, $\sum_{n=1}^{70} a_n = a_1 + a_2 + a_3 - a_1 = a_2 + a_3 = 50$, 又 $a_3 = a_2 - a_1$,

得 $a_1=10$，$a_2=30$，$a_3=20$. 所求 $\sum_{n=1}^{101} a_n = a_1+a_2+a_3-a_1-a_2=a_3=20$.

8. 設△ABC 中，點 P 與 N 分別為邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CA}$ 上的點，M 為 $\overline{BC}$ 的中點。令 K 為 $\overline{PN}$ 與 $\overline{AM}$ 的交點。已知 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{1}{2}$ 且 $\dfrac{\overline{Ak}}{\overline{KM}}=\dfrac{3}{4}$，則 $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{NC}}$ 之值為______。

[解]：令 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AN}$. 由分點公式 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\dfrac{7}{3}\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{2}\times 3\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{2}t\overrightarrow{AN}$;

因為 $K-P-N$ 三點共線, 知 $\dfrac{7}{3}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}$, $t=\dfrac{5}{3}$. 所以 $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{NC}}=\dfrac{3}{2}$.

9. 設 $a=\sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$，則 $a^6-9a^2-18a+27$ 之值為______。

[解]：$a=\sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow a^3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+3\sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}\times(\sqrt[3]{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}})+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$=3+3\sqrt[3]{\dfrac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}}\cdot a=3+3a$, 平方後得 $a^6=9+18a+9a^2$, $\therefore a^6-9a^2-18a=9$

$\therefore a^6-9a^2-18a+27=9+27=36$.

10.設符號[a]表示不大於 a 的最大整數值，則方程式[x^2-4x+7]$=2x^2-8x+3$ 最大的根為______。

[解]：$2x^2-8x+3\le x^2-4x+7<2x^2-8x+4$, 且 $2x^2-8x+3$ 為整數.

解得聯立不等式範圍為 $2-\sqrt{8}\le x<2-\sqrt{7}$ 或 $2+\sqrt{7}<x\le 2+\sqrt{8}$.

又將 $x=2+\sqrt{8}$ 代入 $2x^2-8x+3$,

得 $2(2+\sqrt{8})^2-8(2+\sqrt{8})+3=11$ 為整數, 所以 $2+\sqrt{8}=2+2\sqrt{2}$ 為最大根.