

# 國立新港藝術高中 98 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

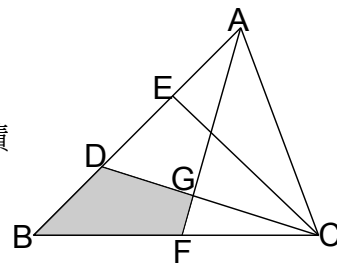
◎本卷請隨答案卷繳回，勿攜出試場。

一、填充題(第 1 題至第 5 題每題 4 分，第 6 題至第 15 題每題 5 分)

※請依照題號作答，不需詳列計算過程，答案需化至最簡，全對才給分。

1. 若二拋物線  $\begin{cases} y=x^2+a \\ y=-x^2+4x+3 \end{cases}$  的兩交點 A、B 的連線通過原點，則  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 如右圖，三角形 ABC 中，D、E 為  $\overline{AB}$  的三等分點，F 平分  $\overline{BC}$ ， $\overline{AF}$  與  $\overline{CD}$  交於 G 點，求四邊形 BDGF 的面積是三角形 ABC 面積的幾分之幾？ $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



3. 求  $2009^{2009}$  除以 33 的餘數 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 有紅，黃，白，黑球各二個，同色相同，取五個排一列同色不相鄰，排列數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 求  $1 \cdot 1 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) + \dots + (1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \dots + n \cdot 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 已知  $a, b, c$  為方程式  $x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$  的三根，求  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若  $x = \cos \frac{2\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi}{15}$ ，則滿足  $f(x) = 0$  的最少次多項方程式是？ $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 袋中有 6 個紅球， $n$  個白球( $n \geq 2$ )，自袋中任取 3 球，取得 1 紅球 2 白球的機率為  $P_n$ ，則當  $n$  為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 時， $P_n$  有最大值。

9. 設  $z$  是複數，且  $\frac{z}{z-1}$  是純虛數(即虛部不為 0 而實部為 0)，試求  $|z-i|$  的最大值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 數值資料  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  的算術平均數為  $\bar{X}$ ，中位數 Me，標準差為 S，令

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - Me|, \quad Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|, \quad R = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - Me)^2}$$

試比較 P、Q、R、S 的大小：  
 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

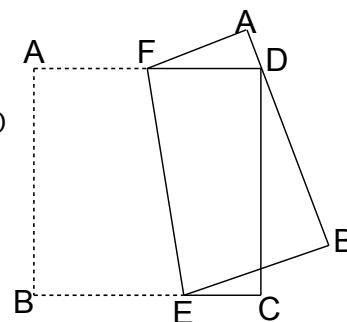
11.  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2009}$  為實數， $\sum_{i=1}^{2009} x_i = 2,000,000$ ，且對  $i=1, 2, \dots, 2009$  皆滿足  $x_i > i$ ，求  $\sum_{i=1}^{2009} \frac{1}{x_i - i}$  的最小值\_\_\_\_\_。

12.  $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\log 2 \approx 0.3010$ ，附上常用對數表一小段，求  $\sqrt{20}^{\sqrt{2}} \approx$  \_\_\_\_\_。  
(求到小數點後第3位)

x											表尾差								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9

13. 座標平面上單位圓  $C: x^2 + y^2 = 1$ ，一定點  $A(2, 0)$ ， $Q$  為圓  $C$  上一動點，以  $Q$  為中心，將  $A$  點逆時針旋轉  $90^\circ$  得  $p$  點，求動點  $P$  的軌跡方程式\_\_\_\_\_。
14.  $A$  骰子點數  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ； $B$  骰子點數  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ； $C$  骰子點數  $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ，投擲  $A, B, C$  骰子各一次，求點數和為  $11$  點的機率為？\_\_\_\_\_。

15. 正方形  $ABCD$ ， $\overline{BE} = 2\overline{BC}$ ，將  $ABEF$  延  $EF$  線段往右折，使得  $D$  點落在  $AB$  線段上，如圖所示。求  $\sin \angle AFD =$  \_\_\_\_\_。



二、計算題(第1題至第2題每題7分，第3題至第4題每題8分)

※需註明作答題號，需詳列計算過程，分段給分。

- 三角形  $ABC$ ， $\angle A$  的內角平分線  $\overline{AT}$  交  $\overline{BC}$  於  $T$  點，試證  $\overline{AT} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BT} \cdot \overline{CT}}$
- 試證  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$
- 求  $[(3 + \sqrt{11})^{100}]$  的個位數為多少？(編按： $[X]$  表高斯符號)
- $a > b$ ，試證：雙曲線  $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$  互相垂直二切線的交點必在圓  $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$  上。

一、填充題

1. 2.  $\frac{7}{30}$  3. 8 4. 288 5.  $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$  6.  $\frac{-2}{9}$  7.  $x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{15}x + 1 = 0$

8. 11 及 12 9.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  10.  $P \leq Q \leq S \leq R$  11. 無解 12. 8.316 13.  $x^2 + (y-2)^2 = 2$  14.  $\frac{13}{108}$

15.  $\frac{6-\sqrt{6}}{10}$