

國立北門高中 102 學年度第 1 次教師甄選 數學科 試題卷

※請務必於答案卷上依序標明題號後再作答，填充題不需列出計算過程。

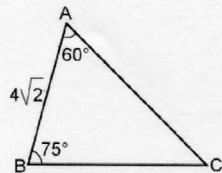
一、填充題：每題 4 分，共 80 分。

1. 設 $x^2 + 2x \log 5 + \log \frac{5}{2} = 0$ 的二根為 α 、 β 則 $10^\alpha + 10^\beta =$ _____。
2. 將 $y = 3^x$ 的圖形向左平移 1 單位，向上平移 2 單位後，再對直線 $y = x$ 做對稱，得到新圖形的方程式為 $y = \log_3(ax + b)$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
3. 數列 $\langle a_n \rangle$ 是公差 -3 的等差數列，前 n 項和以 S_n 表示，已知 $S_{26} = S_{53}$ ，則 S_n 的最大值為 _____。
4. 計算級數： $\frac{2}{1^3} + \frac{6}{1^3 + 2^3} + \frac{12}{1^3 + 2^3 + 3^3} + \dots + \frac{n(n+1)}{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}$ 到第 35 項之值為 _____。
5. 已知兩虛數 z 、 z^2 都是實係數方程式 $x^3 + px^2 + qx + 2 = 0$ 的根，則數對 $(p, q) =$ _____。
6. 設 $(1+x)^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11}$ ，若 a_0, a_1, \dots, a_{11} 的算術平均數為 μ 、中位數為 M_e ，則數對 $(\mu, M_e) =$ _____。
7. 有一組數據的十個數值為 27, 29, 30, 31, 33, 34, 37, 38, x, y ，已知這組數據的平均數是 33，標準差是 4，若 $x < y$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。
8. 三年甲班有 40 位學生參加該年度的學測，座號 k 的同學數學科所得級分以 x_k 表示，若函數 $f(x) = \sum_{k=1}^{40} (x - x_k)^2$ 經整理得 $f(x) = 40x^2 - 640x + 2810$ ，試求數對 $(\mu_x, \sigma_x) =$ _____。
9. 兩組二維數據 (u_i, v_i) 與 (x_i, y_i) ，變量 U 與 X 、 V 與 Y 分別有線性關係如下： $u_i = -x_i + 7$ 、 $v_i = \frac{1}{2}y_i + 2$ ，已知 V 對 U 的迴歸直線通過點 $(8, 3)$ 且 $\mu_x = 4$ 、 $\mu_y = 6$ 則 Y 對 X 的迴歸直線方程式為 $y =$ _____。
10. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{BC} = 6$ 且 $\angle A = 2\angle C$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。
11. 坐標平面上，若 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ 且 $\triangle PBC$ 面積為 8，則 $\triangle ABC$ 面積為 _____。



12. 在坐標平面上的 $\triangle ABC$ 中， O 為外心、 H 為垂心，若 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 75^\circ$ 、 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ ，

求 $|\overrightarrow{OH}| =$ _____。



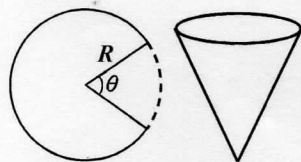
13. 金字塔模型，底面是邊長為2的正方形，四個側面是邊長為3的等腰三角形，求相鄰兩側面夾角的餘弦值為_____。

14. 正四面體的四頂點落在兩歪斜線 $L_1: \begin{cases} x=4+t \\ y=-3-t \\ z=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 與 $L_2: \begin{cases} x=2+s \\ y=2+s \\ z=1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ 上，試求此正四面體的稜長為_____。

15. 已知坐標平面上兩點 $P(7, 1)$ 與 $Q(19, 6)$ 都在拋物線上，且拋物線的準線為 $y = k$ ，求 k 值範圍為_____。

16. 市場調查人員針對臺灣地區的詐騙電話做調查後發現：「有95%的信心水準認為約有69%到75%的人曾接過詐騙電話」，試求此次調查抽樣約_____人

17. 今有半徑為 R 的圓盤剪去圓心角為 θ 的扇形，使得剩下的扇形可捲成一個容積最大的漏斗，試求此時 θ 的值=_____。



18. 已知函數圖形 $\Gamma: f(x) = x^3 - x$ ，而點 $P(a, 0)$ 是圖形外一點，若過 P 恰可作相異三條 Γ 的切線，則 a 的範圍為_____。

19. 設 $f(x)$ 為三次函數，已知 A 點為 $y=f(x)$ 上之反曲點， L 為過 A 之直線，且與 $y=f(x)$ 相交於點 $(-1, -2)$ 、 $(3, 6)$ ，又 $f(0) = 6$ 為 $f(x)$ 之極值，求 $y=f(x)$ 的圖形與 L 所為區域之面積=_____。

20. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 $A^{10} =$ _____。



二、證明題：每題10分，共20分。

1. 證明和角公式： $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。

2. 證明：空間中一點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

填充題答案

1. $\frac{1}{2}$ 2. $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ 3. 2340 4. $\frac{35}{9}$ 5. $(3, 3)$ 6. $(\frac{512}{3}, 110)$ 7. $(31, 40)$ 8. $(8, \frac{5}{2})$ 9. $\frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$ 10. $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

11. 12 12. $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 13. $-\frac{1}{8}$ 14. $\sqrt{2}$ 15. $k \leq -3$ 或 $k \geq 10$ 16. 896 17. $\frac{6-2\sqrt{6}}{3}\pi$ 18. $a > 1$ 或 $a < -1$

19. 16 20. $\begin{bmatrix} 3070 & 2046 \\ -3069 & -2045 \end{bmatrix}$