遞歸數列與不動點

徐瀝泉 · 王繼岳 · 陳漢冶

天地萬物周而復始, 宏觀精微混沌交替, 波浪式起伏前進, 螺旋式循環上升, 人類社會亦寓此理, 歷史的經驗值得注意。

近期翻閱 20世紀 80年代以後中國大陸之高考試題, 對遞歸數列問題尤感興趣, 遂發此文, 以喻此義。特別獻給高中的同學們。

(一) 線性遞歸關係的不動點

一. 一階線性關係 $\boldsymbol{U_n = aU_{n-1} + b}$

1. 預備知識

首先考慮常數項 $b=0$ 的情況

$$U_n = aU_{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{1}$$

我們不固定初項 U_1, (1) 式中 a 不取0, 那麼線性關係 (1) 等價於一族首項為 U_1, 公比為 a 的等比數列 $\{U_n | U_n = U_1 a^{n-1}\}$。

用歸納法可證明上述論斷, 茲從略。

2. 不動點的概念

設線性遞歸關係 $U_n = aU_{n-1} + b$, 又設 $\lim U_n$ 的存在性已獲證明, 求極限值就是簡易事情。

例: 初項 U_1 自由, $U_n = \frac{1}{2}U_{n-1} + 1$, 已知 $\lim_{n\to\infty} U_n$ 存在, 求極限值。

解: 由 $\lim_{n\to\infty} U_n$ 存在, 故 $\lim_{n\to\infty} U_{n-1}$ 存在; 而兩者相等。設為 x, 在給定等式兩端取極限, 於是 $x = \frac{1}{2}x + 1$, $\therefore \lim_{n\to\infty} U_n = x = 2$, 所謂的不動點就是方程的根。

定義: 在線性遞推關係 $U_n = aU_{n-1} + b$ 中, $a \neq 1$, 如 U_n 與 U_{n-1} 同取一值, 則該值叫做上述關係的不動點。

如不動點記為 f, 則 $f = \frac{b}{1-a}$。回顧第一節, 不動點 $f=0$, 重新表述一下。不動點為零的線性遞歸關係等價於一族等比數列 $\{U_1 a^{n-1}\}$

3. 一般情況

$$U_n = aU_{n-1} + b \tag{2}$$

(2) 式兩端各減去 $f = \frac{b}{1-a}$, 於是

$$U_n - f = a(U_{n-1} - f)$$

令 $U'_n = U_n - f$, 對於新的數列 $U'_n = aU'_{n-1}$; 這是不動點爲零的線性遞歸關係, 故

$$U_n = f + (U_1 - f)a^{n-1}$$

當 $|a| < 1$ 時, 極限存在, 且極限值等於不動點。

$$\lim_{n\to\infty} U_n = f.$$

同學們過去的方法: 存在性 $\rightarrow$ 求極限值

現在的方法: 不動點 $\rightarrow$ 通項 $\xrightarrow{\text{判斷存在性}} \begin{cases} \text{肯定, 等於不動點;} \\ \text{否定} \end{cases}$

本節結束以前, 再提一個論斷。

例: $U_n = \frac{1}{2}U_{n-1} + 1$, 求通項數列的極限。

解: 不動點 $f = \frac{1}{2}f + 1$, 即 $f = 2$。

$$\text{通項}\quad \begin{aligned} U_n &= f + (U_1 - f)a^{n-1} \\ &= 2 + (1-2)(\frac{1}{2})^{n-1} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

極限 $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) = 2 = f$。

4. 習題

(a) 一線性遞推關係 $U_n = aU_{n-1} + b$ $(n \geq 2)$ 的不動點 f 的定義是什麼? 如何求法? 以不動點爲出發點, 怎樣求通項? 極限存在的判據是什麼? 如極限存在, 其值是什麼?

(b) 已知 U_1, $U_n = aU_{n-1} + b$ $(n \geq 2)$, 請你推導 $\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_1 + \cdots + U_n$ 的求和公式。

(c) 已知 $U_1 = 1$, $U_n = rU_{n-1} + C^{n-1}$ $(n \geq 2)$ 求通項 U_n; 其中 r 與 c 爲非零常數。

這個問題不屬本文所讀範圍, 但屬於你們的知識領域, 應該找到完善的結論。

二. 分式線性遞推關係 $\boldsymbol{U_n = \frac{aU_{n-1}+b}{cU_{n-1}+d}}$

1. 問題

已知: $Z_1 = i$ $Z_n = \frac{Z_{n-1}+2}{Z_{n-1}+1}$, 求 $\lim_{n\to\infty} Z_n$ 這是 "Serge lang: Complex Anglysis" 一書上的習題, 原書有提示, 要求學生考慮 $\frac{Z_n-\sqrt{2}}{Z_n+\sqrt{2}}$。茲按提示處理

$$\frac{Z_n-\sqrt{2}}{Z_n+\sqrt{2}} = \frac{\frac{Z_{n-1}+2}{Z_{n-1}+1}-\sqrt{2}}{\frac{Z_{n-1}+2}{Z_{n-1}+1}+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})Z_{n-1}-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})Z_{n-1}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{Z_{n-1}-\sqrt{2}}{Z_{n-1}+\sqrt{2}}.$$

故有 $\frac{Z_n-\sqrt{2}}{Z_n+\sqrt{2}} = (\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}\cdot\frac{Z_1-\sqrt{2}}{Z_1+\sqrt{2}} = (\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}\frac{i-\sqrt{2}}{i+\sqrt{2}} \to 0$。$\therefore \lim_{n\to\infty} Z_n = \sqrt{2}$。爲什麼取 $\pm\sqrt{2}$, 答案是兩個不動點。

2. 相異不動點, 如初項 U_1 未定, 給定了分式線性遞推關係

$$U_n = \frac{aU_{n-1}+b}{cU_{n-1}+d} \quad (n \geq 2). \tag{3}$$

$$\text{認定 } c \neq 0,\ \text{設方程 } x = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{或} \quad cx^2+(d-a)x-b=0. \tag{4}$$

有兩個相異根, f_1 與 f_2, 即分式線性關係有兩個不同的不動點, 把 (3) 式改寫成標準形

$$\frac{U_n-f_1}{U_n-f_2} = \lambda\frac{U_{n-1}-f_1}{U_{n-1}-f_2}. \tag{5}$$

把 (3) 式改寫爲 (5) 式是合理的。當 $U_{n-1} = f_1$ 時, $U_n = f_1$, 反之亦然, 當 $U_{n-1} = f_2$ 時, $U_n = f_2$; 反之亦然。現確定常數 λ 之值, 在 (3) 式令 $U_{n-1} = \infty$, 則 $U_n = \frac{a}{c}$, 代入 (5) 式, 故有:

$$\lambda = \frac{\frac{a}{c}-f_1}{\frac{a}{c}-f_2} = \frac{a-cf_1}{a-cf_2}. \tag{6}$$

$$\text{由此得:}\quad \frac{U_n-f_1}{U_n-f_2} = (\frac{a-cf_1}{a-cf_2})^{n-1}(\frac{U_1-f_1}{U_2-f_2}). \tag{7}$$

從 (7) 式可以求得通項。

極限　如 $|\lambda| < 1$, $\lim_{n\to\infty} U_n = f_1$;

如 $|\lambda| > 1$, $\lim_{n\to\infty} U_n = f_2$;

如 $\lambda = -1$, 不存在;

$|\lambda| = 1$, 不存在。

問題 $\lambda = 1$ 能成立嗎?

3. 不動點重合

如 $f_1=f_2=f$, 換言之, 方程 $cx^2+(d-a)x-b=0$ 的判別式 $\Delta=(d-a)^2+4bc=0$, 此時 $f=\frac{a-d}{2c}$ 把分式線性關係 $U_n=\frac{aU_{n-1}+b}{cU_{n-1}+d}$ 改寫爲標準形

$$\frac{1}{U_n-f}=\frac{1}{U_{n-1}-f}+k \tag{8}$$

這個改寫是合理的, 因爲 U_n, U_{n-1} 只要有一個取值 f, 另一個也取值 f; (8) 和 (3) 有相同的不動點, 在 (3) 中, 令 $U_{n-1}=-\frac{d}{c}$, 則 $U_n=\infty$, 代入 (8) 得到:

$$k=\frac{1}{\frac{d}{c}+f}=\frac{1}{\frac{d}{c}+\frac{a-d}{2c}}=\frac{2c}{a+d}.$$

故有 $\frac{1}{U_n-f}=\frac{1}{U_{n-1}-f}+\frac{2c}{a+d}$, 於是 $\frac{1}{U_n-f}=\frac{1}{U_1-f}+(n-1)\frac{2c}{a+d}$。通項由此而定。

4. 小結

相異不動點 $\frac{U_n-f_1}{U_n-f_2}=(\frac{a-cf_1}{a-cf_2})^{n-1}\frac{U_1-f_1}{U_2-f_2}$.
重合不動點 $\frac{1}{U_n-f}=\frac{1}{U_{n-1}-f}+\frac{2c}{a+d}$.

5. 進一步的例題

問題: 給定一實數列 $\{U_n\}$, 其中 U_0 爲正整數, 且

$$U_{n+1}=\frac{2U_n+1}{U_n+2} \quad n\in\{0,1,2,3,\ldots\}.$$

(1) 證明不論 n 爲任何自然數, 存在一個整數 a_0, 滿足 $U_n=\frac{a_nU_0+(a_n-1)}{(a_n-1)U_0+a_n}$, 求出整數列的通項公式;

(2) 求 $\lim_{n\to\infty}U_n$。

略解: 不動點 $f_1=1$ $f_2=-1$。
通項: $\dfrac{U_n-f_1}{U_n-f_2}=(\dfrac{a-cf_1}{a-cf_2})^n\dfrac{U_0-1}{U_0+1}$;
$\dfrac{U_n-1}{U_n+1}=(\dfrac{2-1\cdot 1}{2+1\cdot 1})^n\dfrac{U_0-1}{U_0+1}=\dfrac{1}{3^n}\cdot\dfrac{U_0-1}{U_0+1}$.
先解 (2): $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=1=f_1$.

再解 (1) 從給定關係式 $U_n=\frac{a_nU_0+(a_n-1)}{(a_n-1)U_0+a_n}$ 得:

$$\frac{U_n-1}{U_n+1}=\frac{1}{2a_n-1}\cdot\frac{U_0-1}{U_0+1}.$$

於是 $2a_n-1=3^n$, $\therefore a_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$, 故 a_n 爲整數。

6. 習題

(a) 已知 $U_1=5$, $U_n=\frac{3U_{n-1}+1}{2U_{n-1}+2}$, 求 U_n, $\lim U_n$。

(b) 已知 $U_1=2$, $U_n=\frac{5U_{n-1}+2}{2U_{n-1}+1}$, 求 U_n, $\lim U_n$。
如果極限存在, 你能有什麼結論?

(c) 詳解第 5 節的問題。

三. 二階線性遞歸關係 $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$

1. 預備知識

我們希望用一階的結果來解決二階的問題

引理: 如 r 是方程 $r^2-ar-b=0$ 的根, 則二階線性遞推關係

$$U_n=aU_{n-1}+bU_{n-2}\quad (n\geq 3), \tag{1}$$

$$\text{等價於}\quad U_n-rU_{n-1}=(a-r)(U_{n-1}-rU_{n-2})\quad (n\geq 3). \tag{2}$$

證:
$$\begin{aligned} U_n-rU_{n-1}&=(a-r)U_{n-1}+bU_{n-2}\\ &=(a-r)U_{n-1}+(r^2-ar)U_{n-2}\\ &=(a-r)(U_{n-1}-rU_{n-2}). \end{aligned}$$

反之, 由 (2) 可以推出 (1)。

2. 相異二根

設 α、β 爲方程 $r^2-ar-b=0$ 的二個根 $(\alpha\neq\beta)$。
二階線性遞歸關係 (1) 就是:

$$\begin{aligned} &U_n-\alpha U_{n-1}=(a-\alpha)(U_{n-1}-\alpha U_{n-2}),\\ \text{或}\quad &U_n-\alpha U_{n-1}=\beta(U_{n-1}-\alpha U_{n-2}). \end{aligned}$$

$$\text{遞推之}\quad U_n-\alpha U_{n-1}=\beta^{n-2}(U_2-\alpha U_1). \tag{3}$$

$$\text{同理}\quad U_n-\beta U_{n-1}=\alpha^{n-2}(U_2-\beta U_1). \tag{4}$$

解 (3) 與 (4) 兩式, 則有通項公式

$$U_n=U_2\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+bU_1\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta} \tag{5}$$

例: $U_1=0$, $U_2=1$, $U_n=\frac{1}{2}U_{n-1}+\frac{1}{2}U_{n-2}$ $(n\geq 3)$, 求 $\lim U_n$。

解: 特徵方程 $r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$, $\alpha=1$, $\beta=-\frac{1}{2}$, 於是

$$U_n=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}[1+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}]\to\frac{2}{3}.$$

3. 重根

把 (5) 式改寫成

$$U_n=U_2(\alpha^{n-2}+\alpha^{n-3}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-3})+bU_1(\alpha^{n-3}+\alpha^{n-4}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-4}).$$

令 $\alpha=\beta$, 則 $U_n=U_2(n-1)\alpha^{n-2}+bU_1(n-2)\alpha^{n-2}$。

例: $U_1=1$, $U_2=2$, $U_n=2U_{n-1}-U_{n-2}$ $(n\geq 3)$, 求 U_n。

解: $\alpha=1$, $U_n=2(n-1)1^{n-2}-1\times 1(n-2)1^{n-3}=n$。

4. 斐波那契數列 $\boldsymbol{F_n=F_{n-1}+F_{n-2}}$ $\boldsymbol{(n\geq 3)}$

通常取 $F_1=F_2=1$, 則它有如下性質:

(i) 通項

$$\begin{aligned}F_n&=F_2\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta F_1\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

注意到 α、β 爲方程 $r^2-r-1=0$ 的根, 故 $1+\alpha=\alpha^2$, $1+\beta=\beta^2$。

於是: $F_n=\frac{\alpha^{n-1}(\alpha+1)-\beta^{n-2}(\beta-1)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$。

由於 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 故 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$。

(ii) n 項的和 $\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})-1$。

(iii) 平方和 $\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$。

5. **lucas** 關於斐波那契數列的研究

(i) $F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$。

(ii) $F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}=-F_{2n-1}+1$。

(iii) [lucas and Catalan] $F_{n-1}^2+F_n^2=F_{2n-1}$; $F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$ 。

(iv) $F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_{n-2}=F_{2n-1}$。

(v) $F_n^3+F_{n+1}^3-F_{n-1}^3=F_{3n}$。

(vi) $C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots=F_{n+1}$。

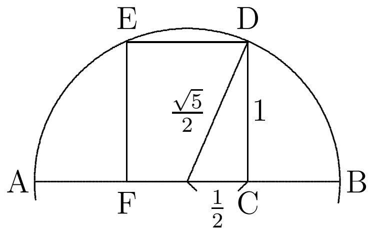
6. (大陸地區) 高考題的背景介紹

1981年的附加題, 原題如下:

已知以 AB 爲直徑的半圓, 有一個內接正方形 CDEF, 其邊長爲 1 (如圖), 設 AC=a, BC=b, 作數列 $U_1 = a - b$, $U_2 = a^2 - ab + b^2$, $U_3 = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3, \ldots, U_k = a^k - a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \cdots + (-1)^k b^k$, 求證: $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ $(n \geq 3)$。

證明: $a + (-b) = 1$, $a(-b) = -1$, 則 a, $(-b)$ 爲方程 $r^2 - r - 1 = 0$ 根

$$U_1 = 1,\ U_2 = 2,\ U_3 = 3, \ldots, U_k = \frac{a^{k+1} - (-b)^{k+1}}{a - (-b)}$$



於是:
$$\begin{aligned} U_{n-1} + U_{n-2} &= \frac{a^n - (-b)^n}{a - (-b)} + \frac{a^{n-1} - (-b)^{n-1}}{a - (-b)} \\ &= \frac{a^{n-1}(1+a) - (-b)^{n-1}[1+(-b)]}{a - (-b)} \\ &= \frac{a^{n+1} - (-b)^{n+1}}{a - (-b)} \\ &= U_n. \end{aligned}$$

實際上 Fibonacci 數列: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$, 具體是 1, 1, 2, 3, 5, $\ldots, \frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}, \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}, \frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}, \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, \ldots$ 而我們的數列 $U_n = F_{n+1}$。

1982年的附加題: 已知數列 $a_1,\ a_2, \ldots, a_n \ldots$ 和數列 $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n \ldots$ 其中 $a_1 = p$, $b_1 = q$, $a_n = qa_{n+1}$, $b_n = qa_{n-1} + rb_{n-1}$ $(n \geq 2)$ (p、q、r 是已知常數, 且 $q \neq 0$, $p > r > 0$)。

(1) 用 p、q、r、n 表示 b_n, 並用數學歸納法證明;

(2) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$。

略證:
$$a_n = a_1 q^{n-1} = pq^{n-1},$$
$$b_n - rb_{n-1} = qa_{n-1} = a_n = pq^{n-1},$$
$$b_{n-1} - rb_{n-2} = pq^{n-2}, \tag{$*$}$$
$$\frac{b_n - rb_{n-1}}{b_{n-1} - rb_{n-2}} = q,\ b_n - rb_{n-1} = q(b_{n-1} - rb_{n-2}),$$
遞推之, 終有 $$b_n - rb_{n-1} = q^{n-2}(b_2 - rb_1). \tag{1}$$
又 $b_n - qb_{n-1} = r(b_{n-1} - qb_{n-2})$, 則
$$b_n - qb_{n-1} = r^{n-2}(b_2 - qb_1). \tag{2}$$
由 (1) 和 (2) 解得 $$b_n = \frac{pq(q^{n-1} - r^{n-1})}{q - r} - qr^{n-1}.$$

從 (1) 式看出, 本題實質是二次遞推問題:

$b_n=(q+r)b_{n-1}-qrb_{n-1}$ (這裡 $a=q+r$, $b=-qr$, $b_1=p$, $b_2=q(p+r)$),

q、r 是特徵方程 $x^2-(q+r)x+qr=0$ 的根, 故

$b_n=b_2\dfrac{q^{n-1}-r^{n-1}}{q-r}+b_1(-qr)\dfrac{q^{n-2}-r^{n-2}}{q-r}$.

把 $b_1=q,\ b_2=q(p+r)$ 代入上式, 即得 $b_n=\dfrac{qp(q^{n-1}-r^{n-1})}{q-r}-qr^{n-1}$,

與前同, 下略。

(二) 不動點與非線性遞推數列

連續幾年的大陸高考都考了遞推數列, 1984年首次考了非線性遞推數列, 由線性遞推到非線性遞推, 無論從難度和方法上都是一次飛躍, 現以 1984、1986 兩年理科高考第八題爲例, 說明非線性遞推數列的背景、構造方法和解這類問題的函數方法。

一. 牛頓公式與哈萊迭代

1984年理科高考第八題, 下簡稱 [84 八]

設 $\alpha>2$, 給定數列 $\{x_n\}$, 其中 $x_1=\alpha$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$, $(n=1,2,\ldots)$。求證:

(1) $x_n>2$, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$, $(n=1,2,\ldots)$;

(2) 如果 $\alpha\le 3$, 那麼 $x_n\le 2+\frac{1}{2^{n-1}}$, $(n=1,2,\ldots)$;

(3) 如果 $\alpha>3$, 那麼當 $n\ge\frac{\lg\frac{\alpha}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 時必有 $x_{n+1}<3$。

本題的解答在不少刊物上都可以找到, 有的作變換 $\mu_n=x_n-1$, 把原數列轉化爲 $\mu_{n+1}=\frac{1}{2}(\mu_n+\frac{1}{\mu_n})$ 模式來處理; 有的比較 $x_n-2=\frac{(x_{n-1}-2)^2}{2(x_{n-1}-1)}$; 有的求其通項等等。但是爲什麼作這樣的變換: $\mu_n=x_n-1$ 呢? 它的背景又是什麼呢? 爲什麼取 $x_n-2=\frac{(x_{n-1}-2)^2}{2(x_{n-1}-1)}$? 這些問題若教師在思想上沒有個底, 要轉化爲學生在考場上的能力是困難的。

首先看一下非線性遞推數列的一個高等數學背景。衆所周知, 求非線性方程 $f(x)=0$ 的根, 一般它很難求解, 但如果已知 x_n 是根的一個近似值, 利用泰勒公式

$$f(x)=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+\cdots,$$

取右邊前二項近似代替 $f(x)$, 就得到容易求解的方程

$$f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)=0.$$

把解出的 x 記作 x_{n+1}, 則有

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdots\ . \qquad (\mathrm{I})$$

x_{n+1} 雖然不一定是方程的根, 但在一定條件下 (可參考 Γ. M. 菲赫金哥爾茨: 微積分學教程第一卷第一分册 p.324) 比 x_n 更接近於根, 這樣如果能計算出 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的值, 利用 (I) 式, 就能夠由根的一個粗略近似値出發逐步得出越來越接近於根的一串近似値, 這種求根的方法稱牛頓迭代法。例如求方程 $x^2-2=0$ 的根, 利用公式 (I), 則有

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n}).$$

這個數列很快收斂於 $\sqrt{2}$。如取 $x_0=1.4$, 按上式算得 $x_1=1.414285714$, $x_2=1.414213564$, 可見它們越來越接近於方程的根 $\sqrt{2}(=1.41421356237\ldots)$。一般若求方程 $x^2-a=0$ $(a>0)$ 的根, 利用 (I) 式可得 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$, 則 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$。再回到試題

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}=x_n-\frac{x_n^2-2x_n}{2(x_n-1)}.$$

不妨設 $f(x)=x^2-2x$, 則 $f'(x)=2(x-1)$, 所以這個數列可以看成是用牛頓切線法求方程 $x^2-2x=0$ 的一個根。但對一個高中生來説顯然還不能理解此式。不過可採取數形結合的方法, 先作出函數 $f(x)=x(x-2)$ 的圖象, 在 $f(x)=x(x-2)$ 上取一點 $P_n(x_n,x_n^2-2x_n)$, 其中 $x_n>2$, 過 P_n 作 $f(x)$ 的切線, 其方程爲 $y-(x_n^2-2x_n)=2(x_n-1)(x-x_n)$, 令切線與 x 軸的交點坐標爲 $(x_{n+1},0)$, 則得 $x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n^2-2x_n}{2(x_n-1)}$, 即 $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$。再採取變換 $\mu_n=x_n-1$, 把原數列化成 $\mu_{n+1}=\frac{1}{2}(\mu_n+\frac{1}{\mu_n})$ 的模式來解。這就是有些雜誌上採取 $\mu_{n+1}=\frac{1}{2}(\mu_n+\frac{1}{\mu_n})$ 解題的數學背景。

再看 1986年理科高考第八題 (下簡稱 [86 八])。

已知 $x_1>0$, $x_1\neq 1$, 且 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$, 試證: 數列 $\{x_n\}$ 或者對任意自然數 n 都滿足 $x_n<x_{n+1}$; 或者對任意自然數 n 都滿足 $x_n>x_{n+1}$。

實際上可以看成是求非線性方程 $f(x)=0$ 的根的哈萊 (因計算哈萊慧星軌道而聞名於世) 迭代法 (關於哈萊迭代可參看 1986年第八期數學通報 p.39∼42)。其公式爲:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-\frac{f''(x_n)f(x_n)}{2f'(x_n)}}\cdots \qquad (\mathrm{II})$$

取 $f(x)=x^2-1$, 則 $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$, 代入 (II) 式, 則有

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-1}{2x_n-\frac{2(x_n^2-1)}{2(2x_n)}}=x_n-\frac{2x_n(x_n^2-1)}{3x_n^2+1}.$$

$$\therefore x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}.$$

這就是試題的形式、牛頓迭代法收斂是二階的, 而哈萊迭代收斂是三階的, 所以在一定條件下起著加速收斂的作用。

以上分析說明, 這兩道試題有著深刻的數學背景, 同時也看到, 只要選取適合一定條件的 $f(x)$, 就能得到非線性遞推數列, 特別當 $f(x)$ 是某一多項式的時候, 便得到高考試題類型。

下面舉幾個利用上述方法構造非線性遞推數列的例子。

1. 取 $f(x)=x(x-4)$, 代入 (I) 按 [84 八] 編題

設 $\alpha>4$, 給定數列 $\{x_n\}$, 其中 $x_1=\alpha$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-2)}$, $(n=1,2,\ldots)$, 求證

(1) $x_n>4$, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$, $(n=1,2,\ldots)$;

(2) 如果 $\alpha\le 5$, 那麼 $x_n\le 4+\frac{1}{2^{n-1}}$, $(n=1,2,\ldots)$;

(3) 如果 $\alpha>5$, 那麼當 $n\ge\frac{\lg\frac{\alpha}{5}}{\lg\frac{6}{5}}$ 時必有 $x_{n+1}<5$。

2. 取 $f(x)=x(x-2)$, 代入 (II) 按 [84 八] 編題

設 $\alpha>2$, 給定數列 $\{x_n\}$, 其中 $x_1=\alpha$, $x_{n+1}=\frac{x_n^3}{3x_n^2-6x_n+4}$, $(n=1,2,\ldots)$, 求證

(1) $x_n>2$, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$, $(n=1,2,\ldots)$;

(2) 如果 $\alpha\le 3$, 那麼 $x_n\le 2+\frac{1}{3^{n-1}}$, $(n=1,2,\ldots)$;

(3) 如果 $\alpha>3$, 那麼當 $n\ge\frac{\lg\frac{\alpha}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 時必有 $x_{n+1}<3$。

3. 取 $f(x)=\frac{2}{x^2}-1$, 則 $f'(x)=-\frac{4}{x^3}$, 代入 (I) 式得 $x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n(6-x_n^2)$。

從形式上看與前面的 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$ 完全不同, 但本質上是一樣的, 也可以按 [84 八] 編題, 略。

二. 不動點與通項公式

又數列可以看作定義在自然數集合上的函數, 所以求非線性方程 $f(x)=0$ 的牛頓切線法其本質就是構造函數 $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, 通過迭代得到序列 $\{x_n\}$, 求出變換 F 的不動點 ξ, 使 $\xi=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, 因為 $f'(\xi)\ne 0$, 所以 $f(\xi)=0$, 即 ξ 是方程 $f(x)=0$ 的根。從不動點的觀點來看, 下列命題對解非線性遞推數列是有用的。

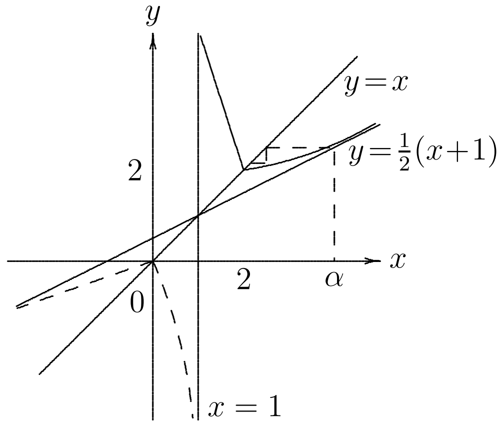
設 $F:I\to R$, 其中 I 是 R 的一個區間, 數列 $\{x_n\}$ 由 $x_0\in I$ 和遞推關係 $x_{n+1}=F(x_n)$ 來定義。若設 F 是連續的, 如果 $\{x_n\}$ 收斂而且有極限 ξ, 則 $\xi=\lim x_{n+1}=\lim F(x_n)=F(\xi)$, 因此問題就變為尋找方程 $\xi=F(\xi)$ 的解 (即 F 的不動點), 並驗證數列是不是收斂於數 ξ。下面兩種情況判斷比較容易。

A. F 在 I 上遞增, 這時數列 $\{x_n\}$ 單調, 若 $F(x_0)=x_1>x_0$, 則由數學歸納法可證 $x_{n+1}=F(x_n)>F(x_{n-1})=x_n$, 即 $\{x_n\}$ 遞增; 若 $F(x_0)=x_1<x_0$, 則 $\{x_n\}$ 遞減。若又能確定 $\{x_n\}$ 有界, 則 ξ 存在。

B. F 在 I 上遞減, 此時複合函數 $F[F(x)]$ 遞增, 而子數列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 中有一個遞增, 另一個遞減。如果它們都收斂而且極限相等, 則此極限必是原數列 $\{x_n\}$ 的極限。如果它們都收斂, 但極限不相等, 則兩個子數列的極限是方程 $F[F(\xi)]=\xi$ 的兩個不同的解。此時 $\{x_n\}$ 不收斂而有兩個極限點。

不論那一種情況都要判斷對每一個 n, 是不是有 $x_n \in I$。

再回到試題 [84 八], $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$ 所對應的函數。$F(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$, 當 $x\neq 1$ 時是連續的, 數列 $\{x_n\}$ 的可能的極限由 $\xi=\frac{\xi^2}{2(\xi-1)}$ 給出, 易得 $\xi=0$ 或 $\xi=2$。所以從函數的觀點來看 $\xi=2$ 是 $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$ 的一個不動點。因此 $x_n-2=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}-2=\frac{(x_{n-1}-2)^2}{2(x_n-1)}$。這就是有些刊物上分析 x_n-2 的根本原因所在。用數學歸納法易證 (1), (2), 至於 (3) 要通過不等式變換將非線性遞推轉化爲線性遞推和反證法。不難作出函數 $F(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$ 的圖像, 從圖像中易看出屬於情況 A, 且當 $\alpha>3$ 時 $\{x_n\}$ 很快趨向於 2。



至於試題 [84 八], [86 八], 能通過求通項的方法來解主要根據是下列命題。

命題一: 設 $f(x)=x^2+px+q$ 的兩實根爲 α、β, $f'(x)=2x+p$, 代入 (I) 式得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2+px_n+q}{2x_n+p}=\frac{x_n^2-q}{2x_n+p},$$

則有

$$\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}=(\frac{x_{n-1}-\alpha}{x_{n-1}-\beta})^2=(\frac{x_{n-2}-\alpha}{x_{n-2}-\beta})^{2^2}=\cdots=(\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta})^{2^{n-1}}.$$

命題二: 設 $f(x)=x^2+px+q$ 的兩個實數根爲 α、β, $f'(x)=2x+p$, $f''(x)=2$, 代入 (II) 式得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2+px_n+q}{(2x_n+p)-\frac{2(x_n^2+x_n+p)}{2(2x_n+p)}}=\frac{x_n^3-3qx_n-pq}{3x_n^2+3px_n+(p^2-q)}$$

則有 $$\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}=(\frac{x_{n-1}-\alpha}{x_{n-1}-\beta})^3=(\frac{x_{n-1}-\alpha}{x_{n-1}-\beta})^{3^2}=\cdots=(\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta})^{3^{n-1}}.$$

限於篇幅, 證明略。

爲求 [86 八] 的通項, 顯然 $\alpha=1$, $\beta=-1$ 是方程 $x=\varphi(x)$ 即 $x=\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$ 的兩個根。在遞推數列 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$ 的兩端分別減去 α 和 β, 兩式相比, 得

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=(\frac{x_n-1}{x_n+1})^3,\quad \text{遞推之終有}\quad \frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}=(\frac{x_1-1}{x_1+1})^{3^n},\quad \text{解出}$$

$$x_{n+1}=\frac{(x_1+1)^{3^n}+(x_1-1)^{3^n}}{(x_1+1)^{3^n}-(x_1-1)^{3^n}},\quad \text{或}\quad x_n=\frac{(x_1+1)^{3^{n-1}}+(x_1-1)^{3^{n-1}}}{(x_1+1)^{3^{n-1}}-(x_1-1)^{3^{n-1}}}$$

借助於通項, 將給我們解決感興趣的問題提供極大的方便, 由於題設中 $\{x_n\}$ 是正項級數, 即對任意自然數 n, 恆有 $x_n>0$, 於是利用比值

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{[(x_1+1)^{3^{n-1}}]^2-(x_1+1)^{3^{n-1}}(x_1-1)^{3^{n-1}}+[(x_1-1)^{3^{n-1}}]^2}{[(x_1+1)^{3^{n-1}}]^2+(x_1+1)^{3^{n-1}}(x_1-1)^{3^{n-1}}+[(x_1-1)^{3^{n-1}}]^2}.$$

不難看出, 對任意自然數 n:

(i) 當 $0<x_1<1$ 時, 恆有 $x_n<x_{n+1}$;

(ii) 當 $x_1>1$ 時, 恆有 $x_n>x_{n+1}$。

這裡, 我們對試題中的問題感興趣, 進一步的結果不再贅述。

爲了熟悉上面的方法, 下列習題供參考。

1. 設 $\alpha>-\frac{3}{2}$, 給定數列 $\{x_n\}$, 其中 $x_1=\alpha$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$ $(n=1,2,\ldots)$, 求證
   (1) 當 $\alpha<3$ 時, 有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$ $(n\geq 2)$, 且 $x_n>3-\frac{9}{2}(\frac{2}{3})^{n-1}$;
   (2) 當 $3<\alpha<4$ 時, 有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$, 且 $x_n<3+(\frac{1}{3})^{n-1}$;
   (3) 如果 $\alpha>4$, 那麼當 $n>\frac{\lg\frac{\alpha}{4}}{\lg\frac{\sqrt{11}}{3}}$ 時必有 $x_{n+1}<4$。
2. 設 $-2\leq\alpha\leq 2$, 給定數列 $\{x_n\}$, 其中 $x_0=\alpha$, $x_{n+1}=\sqrt{2-x_n}$ $(n=1,2,\ldots)$, 求證:
   (1) 當 $-2\leq x_0<1$, 用數學歸納法證明, 數列 $\{x_{2n}\}$ 遞增, 且有 $1-\frac{1}{2^n}<x_{2n}<1$; 數列 $\{x_{2n+1}\}$ 遞減, 且有 $1<x_{2n+1}<1+\frac{1}{2^n}$;
   (2) 當 $1<x_0\leq 2$ 時, 證明 $\{x_n\}$ 遞減; $\{x_{2n+1}\}$ 遞增, 並證明 $\{x_n\}$ 的極限是 1。

—本文作者任職於中國無錫市教育研究中心—