

填充題

1. 在由通過點 $(1,2)$ 的直線與正 x 軸、正 y 軸所形成之所有三角形中，試求最小的三角形面積。
2. 假設一個 5 次整係數多項式 $g(x)$ 的根全為整數，試問共有多少組可能的根使得 $g(x)$ 可以表成 $g(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 6$ ，其中 a, b, c, d 為整數。
3. 假設直角三角形的三個頂點分別為 $A = (0,0)$ ， $B = (1,0)$ 和 $C = (0,4)$ ，令 $Q = (x,y)$ 為此三角形內部的一個點，試求點 Q 和點 Q 到三個頂點距離之和的最小值 (即 $|Q-A| + |Q-B| + |Q-C|$ 的最小值)。

計算與證明題

4. 試求函數 $f(x,y) = x + y^2$ 在單位圓 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上的極值，並找出發生極值的點。

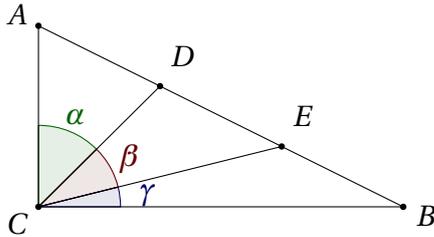
答案

1. 4.
2. 13.
3. $Q = \left(\frac{4224 - 682\sqrt{3}}{7953}, \frac{66 + 1232\sqrt{3}}{7953} \right)$ ，最小距離和 = $\sqrt{17 + 4\sqrt{3}}$.

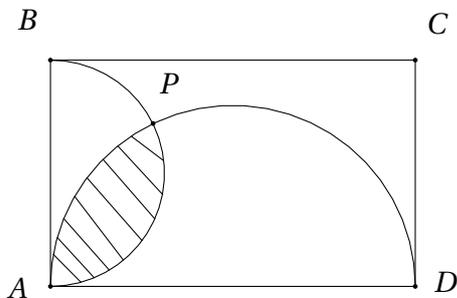
數學科試題卷

作答說明: 請將過程寫答案卷上, 並清楚標出答案.

1. 求不等式 $\log_3 x + \log_x 3 < \frac{10}{3}$ 的解.
2. 有一線段長 15, 以此線段做一正三角形、一正方形和一圓, 請問三者面積和的最小值為何.
3. 如下圖, $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle DCE = \beta$, $\angle ECB = \gamma$, 求 $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = ?$



4. 若地球方程式為 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, 且北緯 θ 所在的平面方程式為 $x + 2y - 2z = 6$, 請問南緯 3θ 所在的平面為何?
5. 設 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$, $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-5}{-6}$, 求 L_1, L_2 之夾角平分線 (用對稱式表示).
6. 已知等腰三角形, 若腰上的中線長為 6, 求三角形面積的最大值為何?
7. 若 $m \in \mathbb{N}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{n+m} \right) = ?$
8. $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\overline{AB} = 1$, 若延長 \overline{AC} 到 D , 並使得 $\overline{AB} = \overline{CD} = 1$, 若 $\angle CBD = 30^\circ$, 求 \overline{AC} 長.
9. 若投擲 n 顆公正的骰子, 有偶數顆為 1 點的機率是 $\frac{1}{2}(a + b^n)$, 求 $(a, b) = ?$
10. 如圖, 矩形 $ABCD$, $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$, $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$, 若以 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 為直徑畫半圓交於 P , 求斜線區域面積為何?



數學科答案卷

1. $\sqrt[3]{3} < x < 27$ 或 $0 < x < 1$
2. $\frac{225}{12\sqrt{3}+16+4\pi}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $x + 2y - 2z + \frac{426}{25} = 0$
5. $\frac{x-1}{13} + \frac{y+2}{-5} + \frac{z+1}{-4}, \frac{x-1}{1} + \frac{y+2}{-23} + \frac{z+1}{32}$
6. 24
7. $\frac{m(m+1)}{2}$
8. $\sqrt[3]{2}$
9. $\left(1, \frac{2}{3}\right)$
10. $5\pi - 6\sqrt{3}$