國立竹東高級中學 102 學年度第一次教師甄試數學科試題卷

一、 是非題：(對的畫「○」，錯的畫「×」。務必簡單說明您的答案才予計分)
(每題 3 分，共 15 分)

X 1. $a>1$ 時，$y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$ 並且不會相交。

○ 2. 長短軸頂點、中心點、兩焦點，這 7 點之中有可能給三個點就決定橢圓。

○ 3.設 $x\in R$，$|2x-3|+|x-5|\le|x+2|$ 恆成立，則 $(2x-3)(x-5)\le 0$。

X 4. $f(x)$ 為實係數 n 次函數，a、$b\in R$；若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則 a 與 b 之間恰有一個實數 c 使得 $f(c)=0$。

X 5.設 a、$b\in R$，已知 $-3<a<5$ 且 $-7<b<1$，則存在實數 a、b 使得 $a+b+ab=12$。

二、填充題:(每題 6 分，共 30 分)

1. 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，直線 L 過 G 且分別交 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 於 M, N。若 $\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BN}=b\overrightarrow{BC}$ (其中 $a>0$，$b>0$)，則 ab 的最小值為 $\underline{\quad \frac{4}{9} \quad}$。

2. 若不等式 $5x^2-\log_a x<0$ 在 $x\in(0,\ \frac{1}{5})$ 內恆成立，則 a 的取值範圍為 $\underline{\frac{1}{3125}<a<1}$。

3. 在銳角 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 D，$\overline{CE}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 E。以 $\overline{DE}$ 為直徑畫圓，此圓與 $\overline{AB}$ 交於另一點 Q。若 $\overline{AC}=25$，$\overline{AE}=7$，$\overline{CD}=15$，則 $\overline{BQ}=$ $\underline{\quad 9 \quad}$。

4. 由曲線 $y=x^3$, y 軸與直線 $y=2$ 三者所圍成的區域繞 y 軸旋轉一周所成的旋轉體體積為 ________。 $\frac{6\sqrt[3]{4}}{5}\pi$

5. 若函數 $f(x)=\sin 2x+2a\cos^2 x-a$（$a$ 為實數）的圖形對於直線 $x=-\frac{\pi}{8}$ 對稱，則 $a=$ $\underline{\quad -1 \quad}$。

三、計算題:(共 31 分)

1. 設曲線 $y=f(x)$（$x\ge 0$）過點 $(0,\ 0)$，且對於任意 $a>0$，此曲線在 $x=0$ 與 $x=a$ 間的弧長為 $\frac{2}{3}\left[(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\right]$。若對於所有 $x\ge 0$，都有 $f'(x)\le 0$，則 $f(x)=$? (10%) －(2/3)x^(3/2)

2. $A(7,6,3)$，$B(5,-1,2)$，L：$\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-3}{-2}$，$P$ 為 L 上的動點，求使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值的 P 點坐標。(7%) $(\frac{11}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$

3. 設$5^{100}=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+a_{n-2}\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+a_1\cdot 2+a_0$，其中$n\in N$，$a_i\in\{0,1\}$，$i$=0，1，2，……，$n$，但$a_n\neq 0$，求$n$之值。(7%) 232

4. 設$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，求$A^n$。(7%) $\begin{bmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$

四、證明題:(共 24 分)

1. 證明：對於所有正整數n，$\prod_{k=1}^{n}(4-\frac{2}{k})$都是正整數。(10%)

2. 請分別利用數學歸納法（9%）與算幾不等式（5%）

   証明：設n為大於 1 的正整數，不等式$2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$恆成立。