填充一

3. 三向量所張的四面體為正四面體，體積為$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 2^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

故平行六面體體積為$6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

5. $E(X)=3\cdot\frac{8}{1000}+2\cdot\frac{12\cdot 8}{1000}+1\cdot\frac{6\cdot 8^2}{1000}=\frac{3}{5}$

填充二

2. 正四面體內切球 S 半徑為$\frac{1}{4}\times$高$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 2=\frac{\sqrt{6}}{6}$，其直徑為$\frac{1}{2}\times$高，故可視$S_1$

內切於高為原高一半的正四面體，其體積為 S 的$\frac{1}{8}$，故無窮等比級數公比為$\frac{1}{8}$，

可得所有球體體積和為$\dfrac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8\sqrt{6}}{189}\pi$

6. 若$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，則其正因數個數為$k=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

質因數p_i愈小且α_i愈大，才能正因數個數愈多

取$n=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\Rightarrow k=5\cdot 2\cdot 2\cdot 2=40$最大

8. 令$x=\frac{1}{n}$，則

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt[3]{n^3+2n^2+1})=\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{\frac{1+x-x^2}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1+2x+x^3}{x^3}})$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x}-\frac{\sqrt[3]{1+2x+x^3}}{x}),\ 令 f(x)=\sqrt{1+x-x^2},g(x)=\sqrt[3]{1+2x+x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x-0}-\frac{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}{x-0})$$
$$=f'(0)+g'(0),\ 其中 f'(x)=\frac{1}{2}(1+x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2x),\ g'(x)=\frac{1}{3}(1+2x+x^3)^{-\frac{2}{3}}(2+3x^2)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$$ (本題出自台大資工94,99二階筆試)