

臺北市立松山高級工農職業學校 102 學年度第 1 次教師甄選  
【數學科】初試試題

作答說明：

1. 請在答案卷上標明題號依序作答。
2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3. 作答時間 90 分鐘。
4. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。

一、填充題(不需要寫算式，第 1~8 題每題 5 分，第 9,10 題每題 6 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{6}} = \underline{\hspace{2cm}} ?$

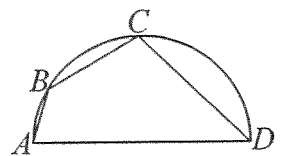
2. 設四次多項式  $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ ，選取積分區間  $a \leq x \leq b$ ，使得定積分  $\int_a^b f(x) dx$  達到最大值，請求出此最大值  $\underline{\hspace{2cm}} ?$

3. 無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3+3^2+\dots+3^n}{5^n} = \underline{\hspace{2cm}} ?$

4. 求  $(1+2x-x^3)^{10}$  展開式中的  $x^3$  項係數為  $\underline{\hspace{2cm}} ?$

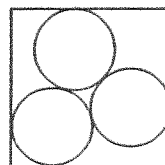
5. 有甲、乙、丙三支大瓶子，開始時均裝有 1 公升的水，每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的水倒出一半到丙瓶，然後再將丙瓶的水倒出一半回甲瓶，若一直操作下去當穩定狀態時，甲瓶的水量為  $\underline{\hspace{2cm}}$  公升？

6.  $\overline{AD}$  為半圓的直徑，且  $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{CD} = 11$ ，則  $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}} ?$



7. 設  $i = \sqrt{-1}$ ，求  $(1 + \sqrt{2}i)^{2013} + (1 - \sqrt{2}i)^{2013}$  除以 12 的餘數為\_\_\_\_\_？

8. 三個半徑為 1 的圓兩兩外切且內切於一個正方形，試問正方形的邊長是\_\_\_\_\_？



9.  $1^2 \cdot C_1^8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 + 2^2 \cdot C_2^8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 + 3^2 \cdot C_3^8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \dots + 8^2 \cdot C_8^8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^8 =$ \_\_\_\_\_？

10. 滿足  $|x| + |y| + |x + y - 1| = 1$  的所有點  $(x, y)$  在坐標平面上所形成的區域面積為\_\_\_\_\_？

二、問答題(每題 6 分)

以下是本校學生解題時常犯的錯誤，(1)請寫出錯誤之處及正確觀念為何(2)寫出正確答案(不需要寫算式)。

1. 已知  $-4 \leq x \leq 1$ ，求多項式  $x^2 + 2x + 3$  的最大值為？

甲同學的算式為：

$$-4 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 16 \dots\dots(1)$$

$$-4 \leq x \leq 1 \Rightarrow -8 \leq 2x \leq 2 \dots\dots(2)$$

將(1)(2)兩式相加可得  $-7 \leq x^2 + 2x \leq 18 \Rightarrow -4 \leq x^2 + 2x + 3 \leq 21$ ，故最大值為 21

2.  $x, y$  為實數且  $-3 \leq x \leq 4$ ， $2 \leq y \leq 5$ ，求  $\frac{y}{x}$  的範圍為？

乙同學的算式為：

$$x = -3, y = 2 \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \quad , \quad x = -3, y = 5 \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{5}{3}$$

$$x = 4, y = 2 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \quad , \quad x = 4, y = 5 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{4}$$

$$\text{範圍為 } -\frac{5}{3} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{5}{4}$$

3. 不等式  $\frac{x+2}{x} > x$  的解為？

丙同學的算式為：

$$\text{兩邊同乘 } x \text{ 得到 } x+2 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

但分母不能為 0，故不等式的解為  $-1 < x < 2$ ， $x \neq 0$

4. 過點 $(-2,2)$ 且和橢圓方程式 $x^2+xy+y^2=1$ 相切的直線方程式為？

丁同學的算式為：

過 $(x_0, y_0)$ 的二次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 切線方程式為

$$ax_0x + b\left(\frac{y_0x+x_0y}{2}\right) + cy_0y + d\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + e\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + f = 0$$

$(-2,2)$ 代入公式得到 $-2x + \frac{2x-2y}{2} + 2y = 1$ ，切線方程式為 $-x+y=1$

5. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ ，求行列式 $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+i & i+g \end{vmatrix}$ 的值為？

戊同學的算式為：

利用一行乘以一數加至另一行，其值不變的性質。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix}]{\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{matrix}} \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+i & i+g \end{vmatrix} = 5, \text{ 答案為 } 5$$

6. 甲乙丙丁戊五人排成一列，其中甲不排首，乙不排尾，則有多少種方法？

己同學的算式為：

首位甲不能排有4種選擇，尾位乙不能排但甲又可以排仍有4種選擇。

剩下三個位置有 $3! = 6$ 種選擇，共有 $4 \times 4 \times 6 = 96$ 種方法。

7. 設函數 $f(x) = x^x$ ， $x \neq 0$ ，求 $f'(x) = ?$

庚同學的算式為：

微分口訣：次方放下來，次方再減1

得到 $f'(x) = x \cdot x^{x-1} = x^x$

8. 設 $x$ 為實數， $y = \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ ，求 $y$ 的最小值為？

辛同學的算式為：

利用算幾不等式  $a, b$  都是正數， $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x \geq 0, \quad \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \geq 0$$

$$\text{則 } \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}{2} \geq \sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}$$

$$\frac{y}{2} \geq 1, \quad y \geq 2$$

$y$ 的最小值為2