臺北市立松山家商102學年度第1次教師甄選初試

數學 科 試題卷

說明：本試題共兩頁，請將答案寫在答案卷上。

一、填充題：每格6分，共60分

1. 試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}=$ ____________。

2. 方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2013}$ 正整數解 $(x，y)$ 有多少組？答：____________組。

3. 求圖形 $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ 在區間 $[\frac{1}{2}，2]$ 上的弧長等於____________。

4. 數字和為 22 的五位數，共有____________個。

5. 設複數 z_1、z_2 滿足 $|z_1|=|z_1+z_2|=2$，$|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$，則 $\log_2|(z_1\overline{z_2})^{2013}+(\overline{z_1}z_2)^{2013}|=$ ______。

6. 有一普通班，此班共有 40 名學生（其中一人為班長），教室內有 40 個座位。每天上課時，這 40 名學生均按隨機的次序排隊進入教室。除班長外，每人進入教室後均會隨意選一個空位坐下，唯班長特別喜歡講桌前的那個座位，若未有人選擇的話他便會選那個座位。試問班長能選到他喜歡的那個座位的機率等於____________。

7. 在 ΔABC 中，$\overline{BC}=11$、$\overline{AC}=4$ 且 $\cos(A-B)=\frac{1}{8}$，求 $\overline{AB}$ 的值等於____________。

8. 設n為自然數且滿足$[\frac{n}{7}]+[\frac{n}{7^2}]+[\frac{n}{7^3}]+[\frac{n}{7^4}]+\cdots+[\frac{n}{7^{2012}}]+[\frac{n}{7^{2013}}]=32$，其中[ ]是高斯符號，試求$n$之最大值與最小值的和等於＿＿＿＿＿。

9. 三次曲線$y=x^3+kx^2+x+1$，若由原點恰可作兩條切線，試求實數k範圍＿＿＿＿＿。

10. 若n是一個三位數且n平方的末三位數也是n，則n所有可能的值是 ＿＿＿＿＿。

二、 證明題：每題 10 分，共 40 分。

1. 若n為6的倍數且n為正整數，證明：$C_0^n+C_3^n+C_6^n+\cdots+C_n^n=\frac{2^n+2}{3}$ 。

2. 設 p 為大於 3 的質數，證明：對於每一個自然數n，n^2+n+1為$(n+1)^p-n^p-1$的因數。

3. 試證：$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\sin 3^\circ+\sin 4^\circ+\sin 5^\circ+\sin 6^\circ+\sin 7^\circ+\sin 8^\circ+\sin 9^\circ<\frac{\pi}{4}$

4. 設a、b、c皆為整數，試證：$7\mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$