

國立臺南第一高級中學 102 學年度教師甄選試題

數學科

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 本試卷共二大題，第一大題填充 8 題，每題 5 分，不需過程；第二大題計算證明共 6 題，每題 10 分，需詳列過程；請依題號作答在答案卷上。
2. 測驗時間從 09:00 到 11:00 共 120 分鐘。
3. 可利用本頁及試卷中空白部分計算。
4. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
5. 交卷時請將試題卷、答案卷一併繳回，若攜出試場不予計分。

填充 8 題，每題 5 分，不需過程；計算證明 6 題，每題 10 分，需詳列過程

填充題

1. 設正整數 a, b, c 滿足 $1 \leq a \leq b \leq c$ 且 $a \mid b+c+1, b \mid a+c+1, c \mid a+b+1$,
求序組 (a, b, c) 共有_____組
2. 設 P 為正五邊形 $ABCDE$ 內部一點，使得 $\angle ABP = 6^\circ, \angle AEP = 12^\circ$ ，則 $\angle PAC =$ _____度
3. 在 10 列 \times 10 行方格中隨機選取 10 個方格，假設
①選取的方格中，都沒有同一行與同一列的機率為 p ；
②選取的方格中，恰有兩個在同一行(其他沒有同一行與同一列的情形)的機率為 q ；
則 $\frac{q}{p} =$ _____。
4. 分數 $\frac{3a9b2}{4736}$ 可化為有限小數，則序對 $(a, b) =$ _____
5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)$ 之值 = _____
6. 將 10 面不同的旗子掛到 6 根不同的旗桿上，必須考慮每根旗桿上旗子的順序，則每根旗桿上都有旗子的機率為 _____
7. 圓 C 是坐標平面上通過 $(0, -2), (6, 4)$ 兩點的圓，若圓 C 與 x 軸交於 A, B 兩點，
則線段 \overline{AB} 的最小值為 _____
8. 四面體 $ABCD$ 中， $\angle BAC = \angle CAD = \angle BAD = 60^\circ$ ， $\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 4, \overline{AD} = 6$ ，設 P 是 $\triangle BCD$ 的外心，若 $\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC} + z \overrightarrow{AD}$ ，則序對 $(x, y, z) =$ _____

計算證明題

1. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, 求出 $A^{n+2} - 2A^{n+1} + A^n$

2. 已知領導係數為 1 的五次實係數多項方程式 $f(x) = 0$ 滿足下述條件：

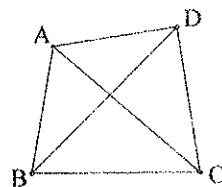
若 α 為 $f(x) = 0$ 的任一根，則 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $1 - \alpha$ 也是 $f(x) = 0$ 的根且 $f(x) = 0$ 有虛根，

求出 $f(x)$

3. 設實係數三次多項式函數 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - a^2x$ (其中 $a > 0$)，若 $x = \alpha, \beta$ 時 $f(x)$ 有極值，

且 $|\alpha| + |\beta| = 2$ ，求 b 的最大值。

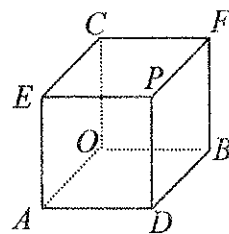
4. 右圖凸四邊形 $ABCD$ ，證明 $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} \geq \overline{AC} \times \overline{BD}$ 。



5. 右圖是坐標空間中一個正立方體(實心)，其中 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$,

$B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ ，若此正方體與直線 $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x - y + 3z = 100 \end{cases}$ 有交集，

求出 a 的最小值。



6. 正 $\triangle ABC$ ， D 是 \overline{BC} 邊上一點，若 $\triangle ACD$ 內切圓半徑是 $\triangle ABD$ 內切圓半徑的 2 倍，

則線段長比值 $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$ 為何？