

教育部受託辦理 102 學年度公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題 12 題及綜合題 2 大題，共計 100 分。選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在答案卷上作答。本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題：（每題 3 分，共 24 分）

(D) 1. 坐標平面上定點 $A\left(\frac{4}{5}, 2\right)$ ，直線 $L: y = -6$ 與拋物線 $\Omega: x^2 = 8y$ 。若點 P 在 Ω 上變動，求 $|d(P, L) - \overline{AP}|$ 的最大值 (A) $\frac{21}{5}$ (B) $\frac{22}{5}$ (C) $\frac{23}{5}$ (D) $\frac{24}{5}$ 。

(B) 2. 高斯符號 $[x]$ ，表示不大於 x 的最大整數值。試求 $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2012}\right]$ 的個位數字 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9。

(A) 3. $f(x)$ 為三次多項式且 $f(2010) = 1$ ， $f(2011) = 9$ ， $f(2012) = 9$ ， $f(2013) = 9$ 求 $f(2014) = ?$ (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20。

(A) 4. 有五組 X 與 Y 的數據資料如下：

X	7	8	9	10	11
Y	11	12	10	8	9

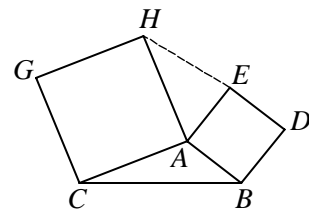
試求 X 與 Y 的相關係數 (A) -0.8 (B) -0.6 (C) -0.4 (D) -0.2 。

(A) 5. 將 12345 化為 $a \times 9^4 + b \times 9^3 + c \times 9^2 + d \times 9^1 + e \times 9^0$ ，其中 $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，則 $a + b + c + d + e = ?$ (A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28。

(B) 6. 設 z 為一複數， $|2z - i| = |z - 2i|$ 的解集合，在複數平面上所有點構成之圖形為何？ (A) 兩直線 (B) 圓 (C) 拋物線 (D) 雙曲線。

(C) 7. 將桌上一長方形 $ABCD$ 沿著對角線 \overline{AC} 摺起，使平面 ABC 與平面 ACD 互相垂直，已知 $\overline{AB} = \sqrt{7}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{2}$ ，則空間中 \overline{BD} 長為 (A) $\frac{\sqrt{18}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{28}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{53}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{45}}{3}$ 。

(C) 8. 在右圖 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BC} = 7$ ，四邊形 $ACGH$ 與 $ABDE$ 均為正方形，則 $\overline{CH} \cdot \overline{BE} =$ (A) $6\sqrt{6}$ (B) $12\sqrt{6}$ (C) $24\sqrt{6}$ (D) $36\sqrt{6}$ 。



二、複選題：（每題 4 分，全對才給分，共 16 分）

(BD) 9. 甲、乙、丙三人組隊參加校外的數學競賽，題目共分為三類：

(1) 團體賽：共 10 題，每題 4 分，三人同作一份試卷，但須分配作答，不能討論。

(2) 接力題：由三人接力作答，前一人答對，後面一個人才能作答，三人皆答對才給 36 分。

(3) 討論題：三人同解一個困難題，答對給 24 分。

已知甲、乙、丙的答對率分別為 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ ，則下列敘述何者正確？ (A) 團體賽中若甲分配 4 題，乙分配 3 題，丙分配 3 題，則得分的期望值為 36 分 (B) 接力賽時得分高低與選手順序無關 (C) 討論題此三人得分的期望值為 18 分 (D) 若討論題解對，則此題由甲獨立解出的機率為 $\frac{3}{23}$ 。

(BC) 10. 已知 $a = (3^{50} + 3^{-50})^3$ ，且 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$ ，則下列何者正確？ (A) 展開後 a 的第一個數字為 5 (B) 展開後 a 的小數點前第 1 個數字是 6 (C) a 的整數部分，有 72 位數 (D) 展開後 a 的小數點後第 72 位開始不為零。

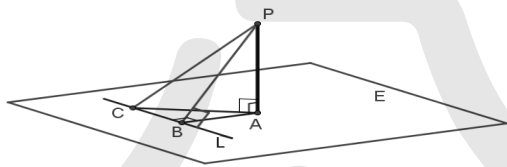
(BD) 11. 一複數 $\omega = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ ，則下列何者正確？ (A) $\omega^{2010} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ 的實部為 $-\frac{1}{2}$ (C) $\omega + \omega^3 + \omega^5 + \omega^7$ 的虛部為 0 (D) $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^3) \cdots (1 - \omega^8) = 9$ 。

- (BCD) 12. $\frac{27^{100}}{5^{200}} = a_n a_{n-1} \cdots a_1 . b_1 b_2 \cdots b_m$, $\forall a_i, b_j$ 均為阿拉伯數字, 其中 a_1 與 b_1 中間的 . 為小數點, 意即小數點左邊為整數部分, 小數點右邊為小數部分, 又 $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, 則下列選項何者正確? (A) $n=3$
(B) $m=200$ (C) $a_n=2$ (D) $b_m=6$ 。

第二部分：綜合題 (共 60 分)

一、填充題(每格 4 分, 共 28 分)

1. 如下圖已知 $\overline{PA} \perp E$ 且 $\overline{AB} \perp L$ 同時 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$, $\overline{PC}=13$, 求 $\overline{PA} = \underline{12}$ 。



2. 有一長度為 5 的線段 \overline{AB} , 在其中取一點 P , 使 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$, 若 A 在 $y-1=0$ 上移動, B 在 $x+1=0$ 上移動, 則 P 點的軌跡方程式為 $\underline{\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1}$ 。
3. 一個二位數字, 其十位數字的兩倍大於個位數字的三倍, 且個位數字加 4 後大於十位數字的兩倍, 又個位數字不為 0, 則此二位數為 $\underline{21}$ 。
4. 從原點沿著球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z = 0$ 上, 到點 $A(1,1,-2)$ 之最短弧長距離為何? $\underline{\frac{\sqrt{6}\pi}{3}}$ 。
5. 多項式 $\left(x + \frac{2}{x} + 2\right)^5$ 的常數項係數為 $\underline{592}$ 。
6. 設六邊形 $ABCDEF$ 中, 各內角相等, 已知 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = 1$ 且 $\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FA} = x$, 設 $\triangle ACE$ 的面積是此六邊形面積的 70%, 則所有可能的 x 之和為 $\underline{6}$ 。
7. 已知 $0 < r < b$, 則圓 $C: x^2 + (y-b)^2 = r^2$ 內部繞 x 軸旋轉一周 360° 所得的旋轉體的體積為 $\underline{2b\pi^2 r^2}$ 。

二、計算證明題(每題 8 分, 共 32 分)

1. 敘述並證明：空間中三垂線定理。

2. 請證明 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 。

3. 設三相異平面 $E_1: x + y + az = 0$, $E_2: 2x - ay + z = 3$, $E_3: 3x + y + 3z = 6$

(1) 若 E_1, E_2, E_3 相交於一直線時, $a = ?$ (2) 若 E_1, E_2, E_3 兩兩相交三條兩兩平行的直線時, $a = ?$

4. 設邊長為 a 的正七邊形的對角線中, 最長為 x , 最短為 y , 試證: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ 。