臺北市立中正高級中學102學年度第1 次專任教師甄選

數學科初選試卷

一、 填充題：

1. 求方程式$6x^6+5x^5-6x^4+6x^3+11x^2-x-6=0$之 所有有理根之和為$\boxed{-\frac{5}{6}}$。

2. 擲一公正骰子n次，出現的最大點數為M，最小點數為m，滿足$M-m<5$的機率為P_n，求$\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\boxed{8}$。

3. 恰有3個數字相同的四位數共有$\boxed{324}$個。

4. 矩陣$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$P=A-I$ 且$P^2=P$，

   (1) 求a、b的關係式$\boxed{a^2-3a-3b+2=0}$。

   (2) $A^{-1}=sP+tI$ ，s、$t\in R$，則數對(s,t)=$\boxed{(-\frac{1}{2},1)}$。

5. 等差數列$\langle a_n\rangle$，前n項和為S_n，若$S_{2013}=3102$ ，$S_{3102}=1302$ ，則$S_{5115}=\boxed{\frac{-93000}{11}}$。

6. 設一球面的半徑為2，球心在直線L：$x=\frac{y}{2}=z+1$上，此球面與xy平面、yz平面、zx平面所交成的圓面積和為S，求S的最大值為$\boxed{\frac{67}{6}\pi}$，此時球面的球心坐標為$\boxed{(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{-5}{6})}$。

7. 設有A、B、C三個硬幣，出現正面的機率依次為50%、30%、60%。今任選一枚硬幣投擲，若出現正面，則用原硬幣再投擲第二次；若第一次投擲反面，則由其餘兩枚中再任選一枚投擲第二次

   (1) 求兩次均為正面的機率$\boxed{\frac{7}{30}}$。

   (2) 若已知兩次均投擲同一枚的條件下，求這枚為C硬幣的機率為$\boxed{\frac{3}{7}}$。

8. 已知有5個正整數，其算術平均數為12，全距為18，中位數與眾數均為8，試問第二大的數之可能值有$\boxed{6}$個。

9. 首先觀察有限小數37.108在小數點前後共寫了5個阿拉伯數字，現在若把$\frac{3^{100}}{2^{50}}$寫成小數型式，則整個數值在小數點前後共需寫出$\boxed{83}$個阿拉伯數字。

臺北市立中正高級中學102學年度第1 次專任教師甄選

數學科初選試卷

二、 計算證明題：自行標號且須有過程，否則不予計分。

1. 已知x,y,z均為實數且$x+y+z=1$，求證$x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$

   耀昇提出下列解法：

   設$x=\frac{1}{3}-t, y=\frac{1}{3}-2t, z=\frac{1}{3}+3t$，則$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+14t^2\geq\frac{1}{3}$得證

   但此種解法是錯誤，請指出錯誤之處並寫出您的證法。

2. 若$f(x)=x^2-x+b$，且$f(\log_2 a)=b$，$\log_2 f(a)=2(a>0,a\neq 1)$。

   (1) $f(\log_2 x)$的最小值及相應的x值。

   (2) 若$f(\log_2 x)>f(1)$且$\log_2 f(x)<f(1)$，求x的範圍。

3. 設$a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=45$

   (1) 求$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=?$

   (2) 求$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}=?$

4. (1) 設$a_1,a_2,\cdots,a_n$；$b_1,b_2,\cdots,b_n$均為正數，

   求證：$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\times\cdots(a_n+b_n)}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$

   (2) 設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求$\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{32}{\sin^3\theta}$之最小值