14　柯西不等式 **2014.2.8**

733. (1) 設 $a, b \in \mathbb{R}$，求 $a^2+b^2+(1-2a-3b)^2$ 的最小值。 (98清水高中)

(2) 設 $A(4,3,2)$, $B(2,1,4)$，點 P 在平面 $E: x-2y-2z=-1$ 上移動，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為 ________。 (100文華高中代理)

(3) 設 x, y 均為實數，則 $(x-2y+5)^2+(x-1)^2+16y^2$ 的最小值為 ________。

答. (1) $\frac{1}{14}$ (2) 14 (3) 16。 (99關西高中)

評. 平方和之極值，自然聯想柯西不等式。

類題. 把平面改成球，而本題亦可用中線定理處理之，見 100中科實中11。

734. 設 $x, y \in \mathbb{R}^+$，且 $2x+y=1$，試求 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 之最小值。 (97台中高工)

答. 9。

735. 若 x, y, z 為實數，則 $\frac{2x-y+z}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}$ 的最大值為 ________。 (98嘉義高工)

答. $\frac{\sqrt{21}}{2}$。

解. 柯西不等式 $\sqrt{x^2+4y^2+z^2}\sqrt{2^2+(-\frac{1}{2})^2+1^2} \geq (2x-y+z)$
$\Rightarrow \frac{2x-y+z}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}} \leq \frac{\sqrt{21}}{2}$。易由柯西等式成立之條件(向量平行)，找到極值點。

736. (1) 若 $\begin{cases} a+b+c+d+e &= 8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= 16 \end{cases}$，求 e 的最大值。 (99屏東女中)

(2) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$，且 $\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ a^2+2b^2+3c^2+6d^2=10 \end{cases}$，若 a 的最大值為 M，最小值為 m，求數對 (M, m)。 (97大里高中)

(3) 已知 $\sum\limits_{k=1}^{10} a_k = 24$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{10} a_k^2 = 64$；若 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ 均為實數，則 a_1 的最大值為 ________。 (99師大附中)

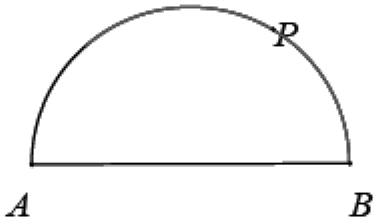
(4) 已知 $x+2y+3z=14$, $x^2+y^2+z^2=196$, $x, y, z \in \mathbb{R}$，求 z 之最大值為 ________。 (99文華高中)

答. (1) $\frac{16}{5}$ (2) 3 (3) $\frac{24}{5}$ (4) $3+\sqrt{65}$。

解(1) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2) \geq (a+b+c+d)^2 \Rightarrow 4(16-e^2) \geq (8-e)^2$，
$\therefore 5e^2-16e \leq 0 \Rightarrow 0 \leq e \leq \frac{16}{5} \Rightarrow e$ 的最大值 $\frac{16}{5}$。

評. 看到二次和一次想到柯西。但第一次這樣做也許不是很自然。或者在做不出來的情況下，應該猜測 $a=b=c=d$。

737. 有一個以 $\overline{AB}=2$ 爲直徑的半圓，若 P 爲圓周上的動點，如圖所示，試求 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$ 的最大值。 (100全國聯招)



答. 10。

738. 若 $\frac{3}{4}\le x\le 2$ 且 $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{4x-3}$，則當 $x=?$ 時 $f(x)$ 有最大值爲多少？

答. $x=\frac{7}{4}$, $\max=\frac{5}{2}$。 (100全國聯招)

提示. 令 $a=\sqrt{2-x}, b=\sqrt{4x-3}$ 則 $4a^2+b^2=5$。

另解. 見 98南港高工3。

739. $a>b>0$，橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切線 L 交座標軸於 A,B 兩點，求線段 $\overline{AB}$ 的最小值。

答. $a+b$。 (100北港高中)

提示. 考慮切線方程式 $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$，其中 (α,β) 爲切點。

740. P 爲 $4x^2+9y^2=36$ 上的動點，若 P 在第一象限移動，過 P 點之切線交 x 軸於 A 點、交 y 軸於 B 點，O 爲原點，求 $\overline{OA}+\overline{OB}$ 最小值。 (99彰化藝術)

答. $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$。

評. 第一象限是不必要的條件，反正是對稱的，不影響距離；反過來當題目沒給第一象限條件是，可加上此條件使得截距皆正，方便計算。

741. 直線 L 過點 $P(16,1)$ 且與 x 軸正向、y 軸正向分別交於 A、B 兩點，O 爲原點，試求 $\overline{OA}^3+\overline{OB}^3$ 的最小值。 (97台中女中)

答. 9^4。

742. (1) 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{64}{\sin\theta}+\frac{27}{\cos\theta}$ 的最小值爲? (100玉井工商)

(2) 若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$ 的最小值爲 ________。 (98彰化女中)

(3) 設 θ 爲銳角，則 $64\sec^2\theta+\csc^2\theta+16\sec\theta\csc\theta$ 的最小值爲 ________。

答. (1) 125 (2) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}}$ (3) 125 。 (99基隆女中)

解(1) Hölder 不等式 $\left(\left(\sin^{2/3}\theta\right)^3+\left(\cos^{2/3}\theta\right)^3\right)^{1/3}\left(\left(\frac{16}{\sin^{2/3}\theta}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{9}{\cos^{2/3}\theta}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 16+9$。所以 $\frac{64}{\sin\theta}+\frac{27}{\cos\theta}\geq 125$。

提示(3) $(\frac{8}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta})^2$。

另解. 亦可用廣義柯西不等式，見 99彰化藝術17 或下題。

743. (1) 設 $a_1,a_2,\ldots,a_n$；$b_1,b_2,\ldots,b_n$ 均爲正數，
求證：$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\times\cdots(a_n+b_n)}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$。

(2) 設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{32}{\sin^3\theta}$ 之最小值。 (102中正高中)

證(1) 由算幾不等式可得 $\frac{\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+b_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}$，
同理 $\frac{\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n+b_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}$。
兩式相加得 $1\geq\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}$
$\Rightarrow\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\times\cdots(a_n+b_n)}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$。

解(2) 由 (1) 知
$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{32}{\sin^3\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{32}{\sin^3\theta}\right)\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\geq 1+2$。
故 $\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{32}{\sin^3\theta}\geq 3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$。

評. (2) 即爲廣義柯西不等式。

744. (1) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3,\overline{BC}=5,\overline{AC}=6$，$P$ 爲 $\triangle ABC$ 內一點，P 到三角形三邊的距離分別爲 x, y, z，則 $x^2+y^2+z^2$ 最小值爲 ________。 (99嘉義高工)

(2) $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=4,\overline{BC}=5,\overline{CA}=6$, $\triangle ABC$ 內部一點 P 到 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 的距離分別爲 h_1,h_2,h_3，則 $h_1^2+h_2^2+h_3^2$ 的最小值爲 ________。 (99文華高中)

(3) $\triangle ABC$中，$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$，若 P 點在 $\triangle ABC$ 內，P 點至 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 距離分別爲 x,y,z，求 $3x^2+y^2+2yz+2z^2$ 之最小值。 (100永春高中代理)

答. (1) $\frac{16}{5}$ (2) $\frac{225}{44}$ (3) $\frac{36}{5}$。

提示(1) 由面積關係可得 $3x+5y+6z=2\triangle=\sqrt{224}=4\sqrt{14}$。

提示(3) 配方。

745. $\triangle ABC$ 中，P 爲內部一點，過 P 點作垂足分別交 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 於 D、E、F 三點，若 $\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$ 有最小值，則此時 P 點的位置爲？(請寫證明過程) (97台中二中)

答. 內心。

746. 已知 a, b 為正實數，m, n 為實數，$m^2n^2 > a^2m^2 + b^2n^2$。令 $A = \sqrt{m^2+n^2}$, $B = a+b$。試證明 $A > B$。 (100中壢高中2招)

證. $m^2n^2 > a^2m^2 + b^2n^2 \Rightarrow \frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{m^2} < 1$。
由柯西不等式得 $m^2+n^2 > (\frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{m^2})(m^2+n^2) \geq (a+b)^2$，開方得證。

另證. 考慮 $\frac{n^2-a^2+m^2-b^2}{2} \geq \sqrt{(n^2-a^2)(m^2-b^2)} > ab$，移項開方得證。

747. $\star$ x, y, z 為正數，求證 $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$ (100南科實中)

證. 注意 $x(y+2z)+y(z+2x)+z(x+2y) = 3(xy+yz+zx)$。由柯西不等式有
$[x(y+2z)+y(z+2x)+z(x+2y)]\left[\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y}\right] \geq (x+y+z)^2$。
而 $(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$,
$\Rightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$。
所以 $3(xy+yz+zx)\left[\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y}\right] \geq 3(xy+yz+zx)$
$\Rightarrow \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$。

748. 四相異正數 x_0, x_1, x_2, x_3，欲使 $\frac{\log_{\frac{x_0}{x_1}} 2009 + \log_{\frac{x_1}{x_2}} 2009 + \log_{\frac{x_2}{x_3}} 2009}{\log_{\frac{x_0}{x_3}} 2009} \geq k$ 恆成立，則實數 k 的最大值為 ________。 (98清水高中)

答. 9。

解. 原題目有誤，應改為 $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > 0$。
令 $a = \log \frac{x_0}{x_1}, b = \log \frac{x_1}{x_2}, c = \log \frac{x_2}{x_3}$，則由柯西不等式有
$\frac{\log_{\frac{x_0}{x_1}} 2009 + \log_{\frac{x_1}{x_2}} 2009 + \log_{\frac{x_2}{x_3}} 2009}{\log_{\frac{x_0}{x_3}} 2009} = (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 3^2$。

749. 求證 $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + x_3$，$(x_1, x_2, x_3 > 0)$。 (97楊梅高中)

750. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 a；E, F, G, H 分別在 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 上，且 $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$；則正方形 $EFGH$ 面積的最小值為何？又 $\triangle AEH$ 的內接圓半徑之最大值為多少？ (97高雄市聯招)

答. 最小面積 $\frac{a^2}{2}$，最大半徑 $r = \frac{2-\sqrt{2}}{4}a$。

15 算幾不等式

751. 在通過點 $(1,2)$ 的直線與正 x 軸、正 y 軸所形成之所有三角形中，試求最小的三角形面積。 (99屏北高中)

答. 4。

752. 一圓錐高 h，底圓半徑 r，一內接圓柱，高 y 底圓半徑 x，試求內接圓柱的最大體積。

解. $\frac{4\pi hr^2}{27}$。 (100中和高中)

證. 由相似形得 $\frac{y}{h}=\frac{r-x}{r}\Rightarrow ry=hr-hx\Rightarrow hx+ry=hr$。
由算幾不等式得 $\frac{\frac{hx}{2}+\frac{hx}{2}+ry}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{4}h^2x^2ry}$。
$\Rightarrow\frac{27}{4}h^2rx^2y\leq h^3r^3\Rightarrow V=\pi x^2y\leq\frac{4\pi hr^2}{27}$。

評. 這類題型中，雖然變數彼此互相依賴，可取出最少個自由變數，以微分處理之。但依較多變數處理時，則可運不等式在其關係式上，見以下題目。

753. 有一直立圓柱罐頭(圓柱的高 h, 底圓半徑 r)，若要使此圓柱的罐頭使用最少的材料，則 h 與 r 的關係為 ________。 (100內湖高工)

答. $h=2r$。

754. 一個球的內接圓錐的最大體積與這個球的體積比為 ________。 (100台中二中)

答. $\frac{8}{27}$。

755. 設圓半徑為 1，今將中心角為 θ 的扇形剪去，剩下其餘部份作成一圓錐容器，當 θ 為 θ_0 時， 容器最大體積為 M，求 M,θ_0 分別為何？ (98高雄市聯招)

答. $M=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27},\theta_0=2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$。

756. 設 a, b 均為正數，且 $f(x)=(x+a)(x+b)$，則 $\frac{f'(a)}{a}+\frac{f'(b)}{b}$ 之最小值為何？

答. 8。 (100金門農工)

757. 已知 a,b,c 為正數且 $a+b+c=1$，則 $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$ 的最小值為 ________。

答. 8。 (100成淵高中)

解. 原式 $=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ca}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$。

758. 三正數 a, b, c，且 $a+b+c=3$，試求 $\log_4\left(\frac{3}{a}-1\right)+\log_4\left(\frac{3}{b}-1\right)+\log_4\left(\frac{3}{c}-1\right)$ 的最小值。 (100鳳山高中)

答. $\frac{3}{2}$。

759. 設 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 都是正數，試證: $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1+x_2+\ldots+x_n$。

證. 令 $x_{n+1}=x_1$。$\frac{x_k^2}{x_{k+1}}+x_{k+1} \geq 2x_k$，將 $k=1,2,3,\ldots n$ 加起來得 (100桃園高中)
$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\right)+(x_1+x_2+\ldots+x_n) \geq 2(x_1+x_2+\ldots+x_n)$，
移項得證。

760. 已知 $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$，$xyz=1$ 且 $x+y+z=0$。則這三個數中最大數的最小值爲何？

答. $2^{\frac{2}{3}}$。 (100桃園高中)

解. 三數必一正二負，不失一般性假設 $x>0,\ y,\ z<0$。
則 $x=-y-z \geq 2\sqrt{yz}=\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x \geq 2^{\frac{2}{3}}$。
檢驗 $(x,y,z)=(2^{\frac{2}{3}},-2^{\frac{1}{3}},-2^{\frac{1}{3}})$。

761. 若 x 的 101 次方程式 $x^{101}-202x^{100}+a_{99}x^{99}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 有 101 個正實根，對於所有可能的方程式，試求 $\sum\limits_{k=0}^{99}|a_k|$ 的最大值。 (101建國高中2招)

答. $3^{101}-203$。

解. 令 $x_k, k=1,2,3,\ldots,101$ 是 101 個正根。
多項式 $\prod(x-x_i)$ 展開的係數正負相間。$x=-1$ 代入，每項皆負，取絕對值得
$\prod(x_i+1)=\sum_{k=0}^{101}|a_k| \Rightarrow \sum_{k=0}^{99}|a_k|=\prod(x_i+1)-203$。
由算幾不等式得 $\sqrt[101]{\prod(x_i+1)} \leq \frac{\sum x_i}{101}+1=3$。
所以當 $x_i=2$ 時，$\sum_{k=0}^{99}|a_k|$ 有最大值 $3^{101}-203$。

762. x、y、z 爲正實數，則 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值爲________。 (100陽明高中)

答. $\frac{\sqrt{5}}{2}$。

解. 算幾得 $\frac{x^2+\frac{1}{5}y^2}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}xy$, $\frac{\frac{4}{5}y^2+z^2}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{5}}yz$。
兩式相加得 $xy+2yz \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(x^2+y^2+z^2)$。
易驗等號於 $(x,y,z)=t(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{10}})$ 時成立。

763. 設函數 $f(x)=\cos x\cdot\sin^3 x$ 的極大值爲 M，極小值爲 m，則求數對 (M,m) 之值爲何？(Hint:算幾不等式) (99大安高工2招)

答. $(M,m)=(-\frac{3\sqrt{3}}{16},\frac{3\sqrt{3}}{16})$。

解. $\frac{\cos^2 x+\frac{\sin^2 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{\cos^2 x\sin^3 x}{27}} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$。

764. 設 a, b 爲正實數，滿足 $a+b=1$，試求 $ab+\frac{1}{ab}$ 的最小值。 (100新北聯招)

答. $\frac{17}{4}$。

解. $ab+\frac{1}{ab}=ab+\frac{1}{16ab}+\frac{15}{16ab}$。
由算幾不等式得 $ab+\frac{1}{16ab}\geq\frac{1}{2}$；$(\frac{a+b}{2})^2\geq ab\Rightarrow\frac{1}{ab}\geq 4$。
所以 $ab+\frac{1}{16ab}+\frac{15}{16ab}\geq\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$。而等號於 $a=b=\frac{1}{2}$ 處成立。

評. 直覺上 ab 愈接近 1 時，其有最小值，故由猜算幾猜得 $a=b=\frac{1}{2}$ 時有最小值，其中才有 $\frac{1}{16ab}=ab$ 在 $a=b=\frac{1}{2}$ 時出現。因此湊出該式。

765. 設 a, b, c 表三角形之三邊長，試證：$abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$。

提示. 令 $s=\frac{a+b+c}{2}$，則 $a=(s-b)+(s-c)$。 (99中正預校)

766. 試證 $C_1^n\times C_2^n\times C_3^n\times\cdots\times C_n^n<\frac{2^{n(n-1)}}{n!}$ $(n\geq 3)$。 (99左營高中)

767. (1) 試證 $2^n\geq 1+n\sqrt{2^{n-1}}, n\in\mathbb{N}$。 (99左營高中、102竹東高中)

(2) 設 n 為自然數，試證：$5^n\geq 1+4n\sqrt{5^{n-1}}$。 (98玉井工商)

(3) 證明：$\forall n\in\mathbb{N}, 3^n\geq 1+2n\sqrt{3^{n-1}}$。 (98慈濟聯招)

提示(1) $2^n-1=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}$。

768. 設 n 為大於 1 的自然數，證明：$(n!)^3<n^n(\frac{n+1}{2})^{2n}$。 (99松山工農)

769. 設一直角三角形的斜邊長與一股長的和為 6，試求此直角三角形的面積產生最大值時的各邊長。 (97台北縣聯招、97台師大數學系)

答. $2, 2\sqrt{3}, 4$。

770. 求證 a, b, c 為不全相等的正數，且 $a\times b\times c=1$，求證：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$。 (97楊梅高中)

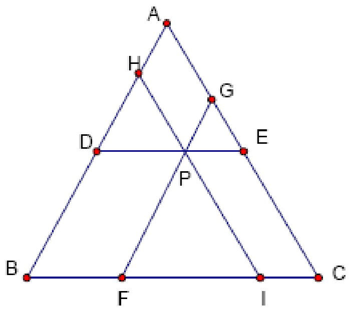
771. 若三正數 x, y, z 滿足 $xyz(x+y+z)=25$，則 $(x+y)(y+z)$ 的最小值為 ____。

答. 10。 (97四區能力競賽)

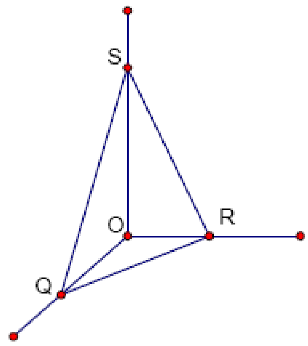
提示. $(x+y)(y+z)=(y^2+xy+zy)+xz, xyz(x+y+z)=xz\cdot(y^2+xy+zy)$。

16　三角不等式、凸函數不等式

772. $\triangle ABC$ 爲邊長是 1 的正三角形，P 爲三角形內部任意一點，過 P 作 $\overline{DE}$ 平行 $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ 平行 $\overline{AB}$, $\overline{HI}$ 平行 $\overline{AC}$ (如圖(一))；在空間坐標系上，取 $\overline{OQ}=\overline{PD}, \overline{OR}=\overline{PE}$, $\overline{OS}=\overline{FI}$ (如圖(二)) 求 $\triangle QRS$ 的周長最小值爲何？ (98高雄市聯招)



（圖一）



（圖二）

答. $\sqrt{2}$。

解. 令 $\overline{PD}=x, \overline{PE}=y, \overline{FI}=z$，則 $x+y+z=1$。
由三角不等式得

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2} \geq \sqrt{(x+y+z)^2+(y+z+x)^2}=\sqrt{2}.$$

773. 直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，設 $\triangle ABC$ 的內切圓 O 交 $\overline{AB}$ 於 D，r 爲內切圓 O 的半徑，$\overline{AB}=c$，求證: (100中正高中2招)

(1) $r=\frac{c}{\cot\frac{A}{2}+\cot(45^\circ-\frac{A}{2})}$。

(2) $r \leq \frac{c}{2}(\sqrt{2}-1)$。

證(1) $r\cot\frac{A}{2}+r\cot(45^\circ-\frac{A}{2})=r\cot\frac{A}{2}+r\cot\frac{B}{2}=c$。(將 $\overline{AB}$ 拆成兩切線段)

提示. $\cot x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是凸函數,

評. 看到 (1) 的分母，聯想到凸函數不等式。

774. a, b, c 爲三角形的三邊長，試證: $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a-b+c}+\sqrt{-a+b+c} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$。又 "=" 何時成立？ (99竹科實中、99鳳新高中、97台中二中)

證. 對任意 $x, y \geq 0, \left[\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2\right](1^2+1^2) \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$，即 $f(x)=\sqrt{x}$ 爲凹函數。
以 $(x,y)=(a+b-c,a-b+c),(a-b+c,-a+b+c),(-a+b+c,a+b-c)$ 代入以上不等式相加除以 2，即得證。
而等號在 $x=y$ 時成立，即 $a+b-c=a-b+c=-a+b+c \Rightarrow a=b=c$。

評. 只要記得凹凸性，無論用柯西、算幾，還是用圖說明不等式都好。

775. 設 a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊長，試證 $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}$。(99高雄市聯招)

提示. $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 內是凸函數。

另證. 調和平均 $\leq$ 幾何平均 $\leq$ 算術平均，再倒數即得證。

776. n 爲自然數，$a > 0, b > 0$，試證：$(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$。 (97南港高工)

17 極值問題

17.1 判別式

777. 設 x 為實數，$\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$ ________。

答. $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$。 (100嘉義高中、99松山家商2招)

解. 令 $y=\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}\Rightarrow(y-1)t^2+(y+1)t+(y-1)=0$,
$\Rightarrow(y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0\Rightarrow\frac{1}{3}\leq y\leq 3\Rightarrow(M,m)=(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$。

778. $y=\frac{\sec^2 x-\tan x}{\sec^2 x+\tan x}$，則 $f(y)=\log_9 y$ 的範圍為閉區間 $[a,b]$，求 a^2+b^2。 (99彰化藝術)

答. $\frac{1}{2}$。

提示. 令 $t=\tan x$，而 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$。

779. $x\in\mathbb{R}$，$f(x)=\frac{2ax+b}{x^2+1}$，若 $f(x)$ 之最大值為 4，最小值為 -1，則 $(a^2,b)=$ ________。

答. $(4,3)$。 (98玉井工商)

780. 直角坐標系中, $A(5,12)$, $B(12,5)$, $P(x,0)$，且 $x>0$，求 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為?

答. $2\sqrt{2}$。 (100玉井工商)

781. $\star$ x 為實數時，若 $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{x^2+x+a}$ 為所有實數，則常數 a 之範圍為 ________。

答. $-2<a<0$。 (99彰化女中)

性質. 設 $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, $D_y=(by-\alpha)^2-4ay(cy-\beta)$，其中 $a\neq 0,\alpha\neq 0$，則有

(1) 若 $y\in f(\mathbb{R})$，則 $D_y\geq 0$。

證. 若 $y=0\in f(\mathbb{R})$，顯然 $D_y\geq 0$，故僅須證明 $y\neq 0$ 的情況。
假設 $y\neq 0$ 且 $y\in f(\mathbb{R})$，則存在 $x_0\in\mathbb{R}$，使得 $y=f(x_0)$。因此二次方程式 $(ax^2+bx+c)y=\alpha x+\beta$ 有實數解，故 $D_y\geq 0$。

(2) 若 $y\neq 0$ 且 $D_y>0$，則 $y\in f(\mathbb{R})$。

證. 若 $D_y>0,y\neq 0$，則 $(ax^2+bx+c)y=\alpha x+\beta$ 有兩相異實根 x_1,x_2。
若 $ax_1^2+bx_1+c\neq 0$，則 $y=f(x_1)$；反之，若 $ax_1^2+bx_1+c=0$ 則 $\alpha x_1+\beta=0\cdot y=0\Rightarrow x_1=-\frac{\beta}{\alpha}$，因此 $ax_2^2+bx_2+c\neq 0$ (否則 $x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=x_1$ 與兩相異根實根矛盾)，故 $y=f(x_2)$。因此無論 $ax_1^2+bx_1+c$ 是否為 0，$y\in f(\mathbb{R})$ 皆成立。

(3) $\deg(\gcd(ax^2+bx+c, \alpha x+\beta)) = 0 \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid D_y \geq 0\}$。
由 (1) (2) 知，$f(\mathbb{R}) \subset \{y \mid D_y \geq 0\}$，且 $\{y \mid D_y \geq 0\} \backslash f(\mathbb{R}) \subset \{y \mid y = 0 \text{ or } D_y = 0\}$。
假設左式成立，則 $ax^2+bx+c=0$ 和 $\alpha x+\beta=0$ 無共根。同 (2) 論述可得 $0 = f(-\frac{\beta}{\alpha})$ 和「當 $D_y=0$ 時，$y=f(x_1)=f(x_2)$，其中 $x_1=x_2$ 爲重根。」故 $\{y \mid y=0 \text{ or } D_y=0\} \subset f(\mathbb{R}) \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid D_y \geq 0\}$。
假設左式不成立，則 $ax^2+bx+c=0$ 和 $\alpha x+\beta=0$ 有共根 $-\frac{\beta}{\alpha}$。$D_0=\alpha^2>0$，但顯然 $0 \notin f(\mathbb{R})$。
實際上 $\{y \in \mathbb{R} \mid D_y \geq 0\} \backslash f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid D_y = 0\}$。

解. 令 $g(x) = f(x) - a = \frac{(1-a)x+1-a^2}{x^2+x+a}$，若 $a=1$，則 $g(x)=0$。若 $a \neq 1$，計算性質中之 $D_y = (y-1)^2 - 4y(y-a)(ya-1)$，由性質 (1) 知 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \subset \{y \mid D_y \geq 0\}$ $\Rightarrow D_y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$。整理得 $D_y = (1-4a)y^2 + (4a^2+2)y + (1-4a) \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$。
若 $a = \frac{1}{4}$，易驗不合，因此 $1-4a>0$ 且判別式非正。
由判別式得 $(4a^2+2)^2 - 4(1-4a)^2 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 0$ 或 $a=2$，又 $1-4a>0$，故 $-2 \leq a \leq 0$，且此時 $\{y \in \mathbb{R} \mid D_y \geq 0\} = \mathbb{R}$。
再由性質 (3) 知僅需檢驗分子分母互質否，若 $\begin{cases} (1-a)x+1-a^2 & =0 \\ x^2+x+a & =0 \end{cases} \Rightarrow$ $a^2+2a=0 \Rightarrow a=-2$ 或 0。故僅當 $-2<a<0$ 時，$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$。

17.2 三角疊合

782. (1) 設 x 爲實數，則 $f(x) = \frac{\cos x+\sin x+2}{\cos x-\sin x+2}$ 之最大值爲 ________。 (100北港高中)

(2) 求 $y = \frac{1+\sin x}{3+\cos x}$ 的極值。 (100新竹高工)

(3) 設 $\theta \in \mathbb{R}$，則函數 $f(\theta) = \left|\frac{5\sin\theta}{4\cos\theta+5}\right|$ 之最大值爲 ________。 (99桃園高中)

(4) 函數 $y = \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$ 之最大值爲 α，最小值爲 β，則數對 $(\alpha, \beta) =$ ________。

答. (1) $2+\sqrt{3}$ (2) $\max = \frac{3}{4}, \min = 0$ (3) $\frac{5}{3}$ (4) $(\frac{4}{3}, 0)$。 (99文華高中)

解(1) $\frac{\cos x+\sin x+2}{\cos x-\sin x+2} = k \Rightarrow (k-1)\cos x - (k+1)\sin x + 2k - 2 = 0$,
$\Rightarrow \sqrt{2k^2+2}\sin(\phi-x) = 2-2k \Rightarrow (2-2k)^2 \leq 2k^2+2 \Rightarrow 2-\sqrt{3} \leq k \leq 2+\sqrt{3}$。

另解. (2)(4) 見 99高雄市聯招。

783. 求函數 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{5-x}$ $(-1<x<1)$ 的最大值。 (99文華高中)

答. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$。

提示. 令 $x = \cos\theta$。

784. 求函數 $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{12-3x}$ 的值域。 (98南港高工)

答. $[1,2]$。

提示. 令 $x=3+\sin^2\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$。

另解. 柯西不等式，見 100全國聯招8。

17.3 圖解、三角不等式

17.3.1 配方、圖形化

785. (1) 設 $x\in\mathbb{R}$，求 $\sqrt{(x-4)^2+25}+\sqrt{(x+4)^2+1}$ 之最小值爲 ________。 (98中興高中)

(2) 若 $y=\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-6x+13}, x\in\mathbb{R}$，則 y 之最小值爲 ________。 (98嘉義高工)

(3) 求函數 $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}, x\in\mathbb{R}$ 的值域。 (100文華高中代理)

(4) 求函數 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-8x+17}$ 的最小值爲 ________。此時 x 之值爲 ________。

答. (1) 10 (2) $\sqrt{34}$ (3) $(-1,1)$ (4) $x=\frac{8}{3}, \min=5$。 (100育成高中代理)

解(1) 該式即 $(x,0)$ 與$(4,5)$, $(-4,-1)$ 的距離和。用三角不等式，得最小值爲 $\sqrt{8^2+6^2}=10$。

評. 看到根號相加減求極值，可聯想到配方距離公式。由圖形的共線與否可知等式成立與否。

786. (1) 求 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值，及當時的 x 值。
(99鳳新高中、99萬芳高中、97文華高中)

(2) 函數 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值爲?
(99松山高中、99中壢高中2招、102師大附中2招)

(3) 考慮所有的正實數 x，$\sqrt{(2-x)^2+(2+\log x)^2}-\sqrt{(12-x)^2+(1-\log x)^2}$ 的最大值爲 ________。 (99華江高中)

(4) $f(x)=\sqrt{4^x-5\cdot 2^{x+1}+x^2-4x+29}-\sqrt{4^x-2^{x+3}+x^2-2x+17}$ 之最大值爲 ________。 (98師大附中)

(5) 設 x、y 爲實數，則函數

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\sqrt{x^2+y^2-6x-y\log_2 9+(\log_2 3)^2+9}\\&+\sqrt{x^2+y^2+4x-y\log_2 144+\log_2 81+(\log_2 3)^2+8}\end{aligned}$$

之最小值爲 ________。 (99安樂高中)

答. (1) $x=\sqrt{2}$, $\min=4$ (2) $\sqrt{10}$ (3) $\sqrt{109}$ (4) $\sqrt{2}$ (5) $\sqrt{29}$。

評. 不只距離和，距離差也是可以玩的。保證等號成立，畫個圖看有交點就好了。

787. (1) 考慮所有的實數 x, y，$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2+(x+y-3)^2}$ $+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2+(x+y-9)^2}$ 的最小值爲 ________。 (100華江高中)

(2) 設空間中 $A(6,0,0), B(8,6,8)$，試求 Z 軸上一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 爲最小，則 P 點坐標爲 ________。 (98嘉義高中)

答. (1) 6 (2) $(0,0,3)$。

788. 平面上有一四邊形 $ABCD$，其頂點分別爲 $A(0,0), B(2,1), C(3,4), D(-1,7)$，此平面上另 P, Q 兩點，使得 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$ 與 $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}$ 均有最小值，試求 P, Q 座標。 (98高雄市聯招)

答. $P(1,3), Q(\frac{3}{2},2)$。

解. 由配方法可得 P 爲四點之中心: $\frac{(0,0)+(2,1)+(3,4)+(-1,7)}{4}=(1,3)$。
而由三角不等式可得 Q 則在六線段(兩兩連一線段)其二的交點上。
解聯立方程 $\begin{cases}\overleftrightarrow{AC}: & 4x-3y=0\\ \overleftrightarrow{BD}: & 2x+y=5\end{cases}$，得 $x=\frac{3}{2}, y=2$，並檢驗其確實在兩線段上。
因此 $P(1,3), Q(\frac{3}{2},2)$。

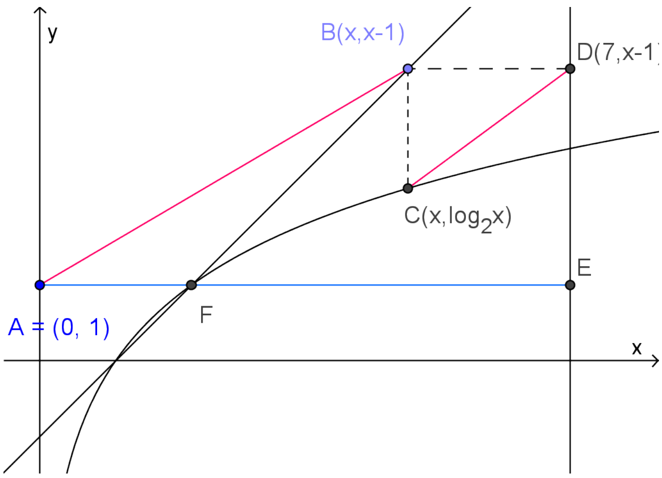
789. ⋆設 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \theta\in\mathbb{R}$，試求：$\sqrt{(\cos\theta-\alpha)^2+(\sin\theta-\beta)^2}+\sqrt{(\cos\gamma-\alpha+5)^2+(\sin\gamma-\beta+15)^2}$ $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-24\alpha+18\beta+225}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-60\alpha-20\beta+1000}$ 的最小值。

答. $23+10\sqrt{10}$。 (100中壢高中2招)

790. ⋆若 $x>0$，則 $\sqrt{2x^2-4x+4}+\sqrt{2x^2-16x+(\log_2 x)^2-2x\log_2 x+2\log_2 x+50}$ 的最小值爲 ________。 (99台中一中)

答. 7。

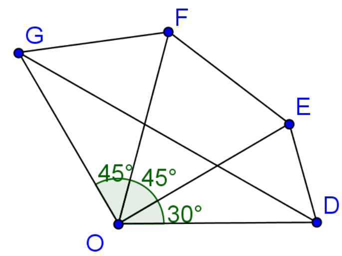
解. 如右圖，$\overline{AB}+\overline{CD}$ 即兩根式之和。當 B,C 重疊於 F 時，有最小值 $\overline{AE}=7$。



791. ⋆設 $a,\ b$ 爲正實數，$A=\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}$, $B=\sqrt{49+a^2-7\sqrt{2}a}$, $C=\sqrt{64+b^2-8\sqrt{3}b}$，則 $A+B+C$ 之最小值 $=$ ________。 (101中科實中)

答. 13。

解. 如右圖，$\overline{OF}=a, \overline{OE}=b, \overline{OG}=7, \overline{OD}=8$，則由餘弦定理得 $A+B+C=\overline{EF}+\overline{GF}+\overline{DE}\geq\overline{DG}$。再由餘弦定理計算得 $\overline{DG}=13$。



792. ⋆證明：$\forall x>0,\ y>0,\ \sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{y^2-3y+3}+\sqrt{x-\sqrt{3}xy+y^2}\geq\sqrt{6}$。 (99中壢高中)

17.3.2 對稱、旋轉

793. (1) $A(-3,1), B(-2,4), C(0,t)$ 若 $\triangle ABC$ 之周長最小，則 t 值 $=$ ________。

(2) 已知兩點 $A(1,-2,-1), B(3,0,-1)$，試在平面 $E:\ 2x-y+2z+1=0$ 上找一點 C，使 $\triangle ABC$ 的周長最小，則 C 點座標爲 ________。

(3) 正方形 $ABCD$ 的邊長爲 5，E 爲 $\overline{BC}$ 上的點使得 $\overline{BE}=3$，$\overline{EC}=2$。若 P 是對角線 $\overline{BD}$ 上的點，當 $\overline{PE}+\overline{PC}$ 有最小值時，此時 $\overline{PB}=$ ________。

答. (1) $\frac{14}{5}$ (2) $(\frac{11}{12},-\frac{5}{6},-\frac{11}{6})$ (3) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$。 (99安樂高中2招、99關西高中、100全國聯招)

提示(1) 考慮 $A'(3,1)$。

794. (1) $A(-1,2,11), B(23,2,-10), C(1,0,3), D(3,1,1)$, P 點在 $\overleftrightarrow{CD}$ 直線上，求 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值。 (102武陵高中)

(2) $L: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$, $A\in L$, $P(6,1,2)$, $Q(-1,-1,3)$，求 $\overline{PA}+\overline{QA}$ 的最小值。 (99彰化藝術)

(3) 一個直角三角柱 $ABC-A'B'C'$，$\angle ACB=90^\circ$，$\overline{BC}=\overline{CC'}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{18}$，點 P 在 $\overline{BC'}$ 上，則 $\overline{PC}+\overline{PA'}$ 的最小值爲? (100板橋高中)

答. (1) $15\sqrt{5}$ (2) $3\sqrt{10}$ (3) $\sqrt{34}$。

解(1) 令 $P(1+2t,t,3-2t)$，

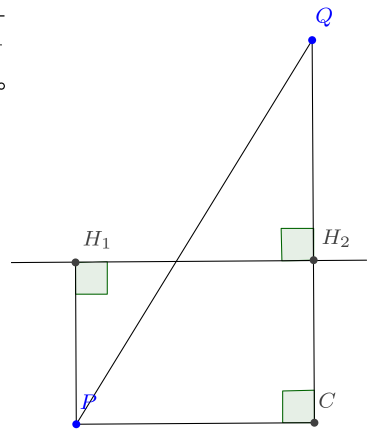
$$\begin{aligned}\overline{PA}+\overline{PB}&=\sqrt{(2t+2)^2+(t-2)^2+(2t+8)^2}+\sqrt{(2t-22)^2+(t-2)^2+(2t-13)^2}\\&=\sqrt{(3t+6)^2+36}+\sqrt{(3t-24)^2+81}\end{aligned}$$

其爲點 $Q(3t,0)$ 到 $R(-6,6)$ 及 $S(24,-9)$ 之距離和。

故 $3t=\frac{-6\cdot3+24\cdot2}{5}$ 時，即 $t=2$, P 爲 $(5,2,-1)$ 時，

有最小值 $\overline{RS}=\sqrt{30^2+15^2}=15\sqrt{5}$。

另解(2) 考慮 P 對 L 旋轉，使得 P,Q,L 共平面，且 P,Q 在 L 異側，如右圖所示。計算兩點到直線之距離分別爲 3, 6，而其投影點之距離爲 3，所求即爲 $\sqrt{(3+6)^2+3^2}=3\sqrt{10}$。



795. (1) ⋆ 有兩射線 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ 夾角 60°，P 爲 $\angle XOY$ 內部一點，$\overline{OP}=10$，今欲在 $\overrightarrow{OX}$ 上取一點 A，$\overrightarrow{OY}$ 上取一點 B，使 $\triangle PAB$ 之周長最小，若 $\triangle PAB$ 之最小周長爲 t，則 $t=$ ________。 (98全國聯招)

(2) ⋆ 圓 $C: (x-4)^2+(y-3)^2=1$，直線 $L: y=\sqrt{3}x$。今在圓 C 上取一點 P，直線 L 上取一點 Q，x 軸上取一 點 R，求 $\triangle PQR$ 的周長最小值。 (99中壢高中)

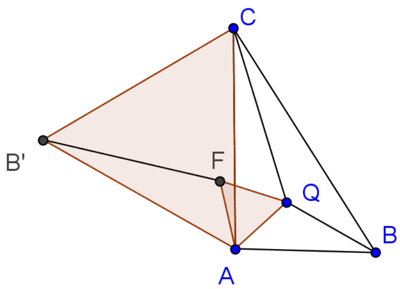
答. (1) $10\sqrt{3}$ (2) $4\sqrt{3}$。

解(1) 做 P 對 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ 的對稱點，利用三角不等式，可證最小周長等於兩對稱點之距離。以 O 爲原點，$\overrightarrow{OX}$ 方向爲正 x-軸，$\overrightarrow{OY}$ 落在第一象限。

令 $P=(10\cos\theta,10\sin\theta)$，則 P 的兩對稱點爲 $(10\cos(-\theta),10\sin(-\theta)),(10\cos(\frac{2\pi}{3}-\theta),-10\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta))$。因此周長$=\sqrt{10^2+10^2-2\cdot10\cdot10\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}=10\sqrt{3}$。

796. (1) ⋆ 設 x, y 爲實數，且 $z = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$，求 z 的最小值。 (100師大附中)

(2) ⋆ 假設直角三角形的三個頂點分別分 $A(0,0)$, $B(1,0)$ 和 $C(0,4)$，令 $Q(x,y)$ 爲此三角形內部的一個點，試求點 Q 和點 Q 到三個頂點距離之和的最小值 (即 $|Q-A|+|Q-B|+|Q-C|$ 的最小值)。 (99屏北高中)



答. (1) $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{17+4\sqrt{3}}$, $Q(,)$。

解(2) 如圖 $\triangle AQF, \triangle ACB'$ 爲正三角形。
$\angle QAC + \angle CAF = \angle CAF + \angle FAB'$
$\Rightarrow \angle QAC = \angle FAB' \Rightarrow \triangle QAC \cong \triangle FAB'$
(SAS)，所以 $\overline{QC} = \overline{FB'}$。因此
$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC} = \overline{QF}+\overline{BQ}+\overline{FB'} \geq \overline{BB'}$。

因此當 Q, F 都在 $\overline{BB'}$ 上時，有最小値 $\overline{BB'} = \sqrt{17+4\sqrt{3}}$。

評. Q 點稱之爲費馬點。

797. P 爲曲線 $y=x^2+2$ 上之動點，A 爲直線 $y=x$ 上之動點，且 $F(2,3)$，則 $\overline{FA}+\overline{AP}$ 的最小值爲 ________。 (98玉井工商)

答. $\sqrt{5}$。

798. 坐標空間中，點 $A(6,3,4)$，點 $B(4,8,3)$，點 P 爲 x 軸上任一點，點 Q 爲 y 軸上任一點，求 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 最小值。 (102文華高中)

答. 290。

解. 注意若以 x 軸爲軸旋轉 A 點，$\overline{AP}$ 之值不變。同理以 y 軸爲轉 B，$\overline{QB}$ 之值亦不變。
將 A, B 旋轉到 xy 平面上，新的點坐標爲 $A'(6,-5,0)$, $B'(-5,8,0)$。
由三角不等式得 $\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'} \leq \overline{A'B'} = \sqrt{11^2+13^2} = \sqrt{290}$。
且其等號在 P, Q 分別爲 $\overline{A'B'}$ 和 x, y 軸的交點時成立。

17.3.3 圓與球

799. (1) 設 $z \in \mathbb{C}$且 $|z-1|=2$，則 $|z-4-4i|$ 的最大值爲 ________。 (98清水高中)

(2) 設 $z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z}=4$，求 $|z+1-\sqrt{3}i|$ 的最大值 ________。 (100育成高中代理)

(3) 已知 Z 爲複數，且 $|Z|=1$，則 $|Z-(3+\sqrt{7}i)|$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則 $(m,n)=$ ________。 (97楊梅高中)

(4) 空間中 $O(0,0,0), A(0,2,4), B(4,4,8), P$ 爲一動點。若 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，求 $\overline{OP}$ 的最大值。 (97台中一中)

答. (1) 7 (2) 4 (3) $(5,3)$ (4) 10。

解(1) 方程式 $|z-1|=2$ 之圖形爲一圓，$4+4i$ 爲複數平面上一點，$|z-4-4i|$ 即點到圓上一點的距離。作過圓心與該點之直線，與圓相交於兩點，分別爲最近點與最遠點。因此 $\max=\sqrt{(4-1)^2+4^2}+2=7$。

800. (1) 已知兩複數 z_1 與 z_2 滿足 $|z_1-(3+3i)|=2$，$|iz_2-1|=1$，則 $|z_1-z_2|$ 的最大值爲 ________。 (99桃園高中)

(2) 考慮滿足 $a^2+b^2=49$，$c^2+d^2-16c-12d=-96$ 的所有實數 a, b, c, d，求 $\sqrt[3]{16c+12d-2ac-2bd-47}$ 的最小值。 (101文華高中)

答. (1) 8 (2) 1。

801. (1) 設 $A(-6,6,1)$, B 爲圓 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-10z+17=0 \\ 2x-y+2z-2=0 \end{cases}$ 上任一點，使 $\overline{AB}$ 有最大值的 B 點座標爲 ________。 (100北港高中)

(2) 設 $P(4,3,1)$，Q 爲圓 $\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-5)^2 &=13 \\ x+2y+2z &=3 \end{cases}$ 上之動點，求 $\overline{PQ}$ 的最小值。 (99基隆女中、100香山高中、99中興高中)

(3) 已知空間中一點 $P(9,12,5)$ 與一球面 $S:\ x^2+y^2+(z-4)^2=25$，若球面 S 與 xy 平面之交圓爲 C，則點 P 與圓 C 上的點距離之最小值爲 ____。(97台中女中)

(4) 空間中，點 $A(4,3,1)$，在平面 $E:\ x+2y+2z-3=0$ 上有一圓心 $B(-1,-1,3)$，半徑爲 4 的圓，圓上的動點 P，則線段 $\overline{AP}$ 的最大值爲 ________。(97台南女中)

(5) 空間中有一圓 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &=14 \\ x+2y+2z &=9 \end{cases}$，及一點 $P(6,3,12)$，若 Q 點在圓 C 上，且 $\overline{PQ}$ 長有最小值，求 (1) m (2) Q 點坐標。 (97竹北高中)

答. (1) $(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3})$ (2) 5 (3) 13 (4) $\sqrt{109}$ (5) $\sqrt{101}$, $(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{10}{3})$。

解(1) 配方 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=10 \Rightarrow$ 球心 $O(1,1,5)$。
$d_1=\frac{|-12-6+2-2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=6$, A 對平面投影得 $A'(-2,4,5)$。
$d_2=\frac{|2-1+10-2|}{3}=3$, O 對平面投影得 $O'(-1,2,3)$, $r=\sqrt{10-3^2}=1$。
$\overrightarrow{A'O'}=(1,-2,-2) \Rightarrow \overrightarrow{O'B}=\frac{1}{3}(1,-2,-2) \Rightarrow B(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3})$。

評. 如果只是要算最大值的話，那些坐標都不用算，見下。

解(3) $\sqrt{5^2+(\sqrt{(9^2+12^2)}-\sqrt{5^2-4^2})^2}=13$。

802. 空間中 $P(a,b,c)$ 為圖形 $x^2+y^2+z^2-4x-2y-3=0$ 上一點，求 $a^2+b^2+c^2+4a-2c+11$ 的最大值 ________，此時數對 $(a,b,c)=$ ________。 (98家齊女中)

答. 56, $(\frac{14}{3},\frac{5}{3},\frac{-2}{3})$。

803. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，則 $y=(\sqrt{6}\sin\alpha-3\tan\beta)^2+(\sqrt{6}\cos\alpha-3\cot\beta)^2$ 的最小值為 ________。 (99中興高中)

答. $24-12\sqrt{3}$。

17.4 運用不等式

804. 設 $P(x,y)$ 滿足 $x^2+(y-1)^2\le 1$ 的所有點，求 $\frac{x+y+1}{x-y+3}$ 的最大值與最小值?

答. 最大值 $2+\sqrt{3}$，最小值 $2-\sqrt{3}$。 (99松山高中、98玉井工商)

解 1. 令 $\frac{x+y+1}{x-y+3}=k, \Rightarrow x+y+1=kx-ky+3k \Rightarrow (1-k)x+(k+1)(y-1)=2k-2$。
由柯西不等式得 $|2k-2|=|(1-k,1+k)\cdot(x,y-1)|\le\sqrt{2k^2+2}\Rightarrow k^2-4k+1\le 0$
$\Rightarrow 2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$。

解 2. 令 $\frac{x+y+1}{x-y+3}=k\Rightarrow(1-k)x+(k+1)y=3k-1$，此方程式代表斜率為 $\frac{k-1}{k+1}$ 且過 $(-2,1)$ 之直線與圓(盤)相交，畫圖可得其斜率介於 $(-2,1)$ 至圓的兩切線之斜率之間。
所以 $-\frac{1}{\sqrt{3}}\le\frac{k-1}{k+1}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow 2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$。

解 3. $(1-k)x+(k+1)(y-1)=2k-2$，為圓盤相交之直線方程式，因此圓心到此直線的小於 1，即 $\frac{|2k-2|}{\sqrt{2k^2+2}}\le 1$，其與柯西不等式相同。

805. ⋆ 設 a, b, c 均為正實數，則 $\frac{a^3+b^3+4}{(a+1)(b+1)}$ 的最小值為 ________。 (100松山家商)

答. $\frac{3}{2}$。

解. 廣義柯西 $(a^3+1^3)(1+1)(1+1)\ge(a+1)^3$。
所以 $a^3+b^3+4\ge\frac{1}{4}((a+1)^3+(b+1)^3)+2$。
再以算幾不等式: $\frac{1}{4}((a+1)^3+(b+1)^3+8)\ge\frac{3}{4}\cdot 2(a+1)(b+1)$。
$\frac{a^3+b^3+4}{(a+1)(b+1)}\ge\frac{3}{2}$，檢查等號成立條件 $a=b=1, a+1=b+1=2$，
恰可成立，所以極小值為 $\frac{3}{2}$。

評. 這題很難，我們還是猜猜 $a=b$，微分一下湊出答案好了。

806. $\star$ $\langle a_n\rangle$ 爲 1 到 n 之一個排列，試證 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\geq\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}$。

提示. 排序不等式 。 (99屏東女中)

17.5 微分

807. 拋物線 $y=x^2$ 到點 $P(1,2)$ 最近的點 Q 座標 ________。 (99嘉義高工)

答. $(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2})$。

解. 令 $f(x)=(x-1)^2+(x^2-2)^2$
$\Rightarrow f'(x)=2x-2+2(x^2-2)\cdot 2x=2\cdot(x+1)(2x^2-2x-1)$。
$f'(x)=(x+1)(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2})\Rightarrow$ 有兩極小值 $f(-1)$ 和 $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$。
檢驗知 $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 爲最小值，$Q(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2})$。

808. 函數 $f(x)=(\sin x+\cos x)^3+(\sin x+\cos x)^2-(\sin x+\cos x)+2$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則數對 $(M,m)=$ ________。 (100麗山高中2招)

答. $(4+\sqrt{2},\frac{49}{27})$。

809. 曲線 $y=f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 上一點 $P(a,f(a))$，$a\in[0,2]$ 滿足以 P 爲切點的切線有最小的 y 截距，則 $a=$ ________。 (100鳳新高中代理)

答. 0。

810. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{5+4\cos x}}, 0\leq x\leq 2\pi$，則 y 的範圍爲 ________。 (100陽明高中)

答. $-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$。

解. 注意 y 爲奇函數， 令 $t=\cos x$, 則 $y^2=\frac{1-t^2}{5+4t}$ 且 $-1\leq t\leq 1$。
微分得 $\frac{-2t(5+4t)-(4-4t^2)}{(5+4t)^2}=-2\cdot\frac{2t^2+5t+2}{(5+4t)^2}=\frac{-2\cdot(2t+1)(t+2)}{(5+4t)^2}$。
以 $t=-\frac{1}{2},\pm 1$ 代入得 $\frac{1}{4},0,0$。所以 $0\leq y^2\leq\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$。

評. 本來二次有理式可以用判別式，但現在 t 有限制範圍，就有點小麻煩，乾脆直接微下去。

811. 設 $a>0$，$O(0,0)$ 爲原點。在拋物線 $ay=a^2-x^2$ 上取一點 $P(s,t), s>0$。過 P 點作拋物線之切線，交 x 軸，y 軸於 Q,R 兩點。當 P 點變動時，$\triangle OQR$ 面積的最小值爲何？ (99中正預校、98曉明女中)

答. $\frac{4\sqrt{3}}{9}a^2$。

812. 正三角形 ABC 的邊長為 1，在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 上各取 P、Q、R 滿足 $\overline{AP}^2=\overline{BQ}^2=\overline{CR}$。 (100麗山高中)

(1) 令 $\overline{AP}=x$，求 $\triangle PQR$ 的面積。(以 x 表示)

(2) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上移動，$\triangle PQR$ 的最小面積為 M，使得 $\triangle PQR$ 的面積為最小時的 x 值為 a；則 $(M,a)=$ ________。

答. (1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(2x^3-2x+1)$ (2) $(\frac{3\sqrt{3}-4}{12},\frac{1}{\sqrt{3}})$。

813. 已知函數 $f(x)=x^2(x-3a)+\frac{1}{2}$ $(a>0, x\in\mathbb{R})$。 (97竹北高中)

(1) 求函數 $y=f(x)$ 的極值。

(2) 若方程式 $f(x)=0$ 有三個不同的實根，求實數 a 的取值範圍。

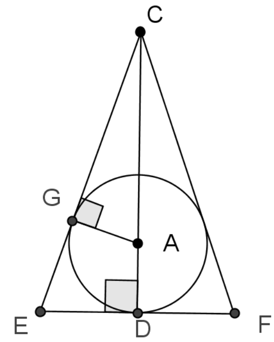
答. (1) 極大 $\frac{1}{2}$, 極小 $\frac{1}{2}-4a^3$ (2) $a>\frac{1}{2}$。

814. 設 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ (α,β 為實數，$0\le\alpha\le\beta$)，且 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=1$，令 $S=\int_0^\alpha f(x)dx$，求 S 的最大值。 (97陽明高中)

答. $\frac{\sqrt{6}}{108}$。

815. 設一直圓錐的內部有一個半徑為 3 的內切球(切於側面及底面)，則當此直圓錐的高為 ________ 時，此直圓錐有最小體積為________。 (97中和高中)

答. $h=12$ 時，有最小值 72π。



解. 觀察球心即圓錐頂點所在平面之剖面圖右，
令高 $\overline{CD}=h$，則 $\overline{AC}=h-3$，
$\overline{CG}=\sqrt{(h-3)^3-3^2}$，由相似形可得
$\overline{DE}=3\cdot\frac{h}{\sqrt{(h-3)^2-3^2}}$。所以圓錐體積為
$\frac{3\pi h^3}{(h-3)^2-3^2}=\frac{3\pi h^2}{h-6}$，微分得 $\frac{3(h-12)h\pi}{(h-6)^2}$。所以當 $h=12$ 時，有最小值 72π。

816. 已知函數 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-1)x$ 有極值。設 $I=\{x\in\mathbb{R}\}\mid f'(x)\ge 0\}$，且 I 包含區間 $(-\infty,0)$ 與 $(1,\infty)$，則實數 a 的範圍為 ________。 (101台中二中2招)

答. $1\le a<\frac{\sqrt{6}}{2}$。

17.6 線性規劃

817. (1) 設一次函數 $f(x) = ax + b$，若 $0 \leq f(1) \leq 1$，$1 \leq f(2) \leq 3$，則 $f(3)$ 的範圍爲 ________。 (100基隆女中代理)

(2) $\langle a_n \rangle$ 爲等差數列，若 $4 \leq a_1 + a_2 \leq 8, -4 \leq a_3 + a_4 - a_7 \leq 4$，則 a_6 的最大值等於？ (97台中二中)

(3) 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$，$(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R})$，已知 $-1 \leq f(1) \leq 2$, $2 \leq f(2) \leq 4$, $-3 \leq f(3) \leq 4$，令 $f(4)$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則 $2M + m =$ ________。

答. (1) $[1, 6]$ (2) 28 (3) -6。 (100文華高中代理)

解(1) 對 a, b 作線性規劃，易得 $1 \leq f(3) = 3a + b \leq 6$。

818. (1) 已知 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 且 $2x + y + z = 4$，若 $x + 3y \leq 5$，則 $x + y$ 的最大值爲 ________。 (99桃園高中)

(2) 設 $a \geq b \geq c \geq -2$ 且 $3a + 2b - c = 4$，則 $a + 2b + c$ 之最大值 $=$ ________。

答. (1) $\frac{13}{5}$ (2) 4。 (100麗山高中)

819. 已知 x, y, z 均爲實數，且 $\begin{cases} 2^x + 3^y + 5^z & = 7 \\ 2^{x-1} + 3^y + 5^{z+1} & = 11 \end{cases}$，若 $t = 2^{x+1} + 3^y + 5^{z-1}$，試求 t 的範圍。 (98高雄市聯招)

答. $\frac{31}{5} < t < 11$。

提示. 令 $2^x = a, 3^y = b, 5^z = c$。

820. 設 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 均爲整數且滿足：(a) $-1 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ (b) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 19$ (c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 99$。令 $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3$，$S$ 的最大值和最小值分別爲 M, m。(原爲多選題) (99桃園高中)

答. $(M, m) = (133, 19)$。

類題. 見 99苗栗高中1。

821. (1) 設 R 代表坐標平面上由不等式 $1 - \sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0$ 所定義的區域，求函數 $3x - y$ 在區域 R 上的最小值爲 ________。 (100桃園高中)

(2) 設 R 表平面上 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 圖形圍成的區域且目標函數 $f(x, y) = x + y$ 在區域 R 上的最大值爲 M，最小值爲 m，則數對 $(M, m) =$ ________。 (100嘉義高中)

答. (1) $3-2\sqrt{10}$ (2) $(2\sqrt{2}, 1-\sqrt{3})$。

822. $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$，求 $|x|-|y|$ 的最小值。

答. $\sqrt{3}$。 (100北市陽明高中、100慈濟聯招)

823. 圖形 C : $y=3-\sqrt{4-x^2}$，若 $P(x,y)$ 在 C 上，則 $\frac{y}{x+3}$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則序對 (M,m) 爲 ________。 (99中正預校)

答. $(3, \frac{9-2\sqrt{14}}{5})$。

解. 令 $Q(-3,0)$，則 $m_{PQ}=\frac{y}{x+3}$，畫圖：對 C 之方程移項平項，可知其爲一弧，圓心 $R(0,3)$，半徑 2。
得 $(-2,3)$ 最大斜率 $M=3$，相切時有最小斜率。
$m_{QR}=1, \tan\theta=\frac{2}{\sqrt{QR^2-2^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow m=\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$。

824. 若 $30^\circ \le \theta \le 60^\circ$，求 $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ 之最大值與最小值。 (99高雄市聯招)

答. $\min=\sqrt{3}, \max=2+\sqrt{3}$。

解. 考慮 $(\cos\theta, \sin\theta)$, $30^\circ \le \theta \le 60^\circ$ 爲單位圓上的弧。$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$，即 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 與 $(0,-1)$ 連線之斜率，由圖可知極值之位置。

另解. 注意 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \Rightarrow \tan(45^\circ-\frac{\theta}{2})=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \Rightarrow \tan(45^\circ+\frac{\theta}{2})=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$。由此得 $\theta=30^\circ$ 時，有最小值 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$；$\theta=60^\circ$，有最大值 $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$。

類題. 100新竹高工2 等。

825. 在平面上，當 (x,y) 滿足 $|x|+|y|\le 1$，x^2+y^2-x+2y 的最小值爲 ________。

答. $-\frac{9}{8}$。 (98玉井工商)

17.7 其它

826. 設 x, y 爲實數，若 $x+y=x^2+y^2$，求 $x^3+y^3+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}y$ 的最大值。 (99松山高中)

答. 11。

類題. 見 100慈濟聯招12

827. $x, y\in\mathbb{R}, x^2+y^2=1$, 若 $x^2+4xy+5y^2$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則 $M+m=$ ________。 (98嘉義高工)

答. 6。

解. 旋轉 $x^2+4xy+5y^2 \to A'x^2+C'y^2$ 極大爲 $\max\{A',C'\}$，極小爲 $\min\{A',C'\}$，而 $A'+C'=6$ 爲旋轉不變量。

另解. 令 $t=x^2+4xy+5y^2, k\in\mathbb{R}$，則 $t-k=(1-k)x^2+4xy+(5-k)y^2$。
取判別式爲 0，$k^2-6k+1=0 \Rightarrow k=3\pm2\sqrt{2}$, 令 $k_1=3+2\sqrt{2}, k_2=3-2\sqrt{2}$
則有 $t=(t-k_1)+k_1=-(\ldots)^2+k_1\le k_1$
$t=(t-k_2)+k_2=(\ldots)^2+k_2\ge k_2$，因此 $3-2\sqrt{2}\le x^2+4xy+5y^2\le 3+2\sqrt{2}$

828. 直角 $\triangle ABC$ 中，以斜邊 $\overline{BC}$ 爲軸旋轉一周而成的兩個圓錐的側面積和爲 S_1，直角 $\triangle ABC$ 的內切圓面積爲 S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值。 (100中正高中)

答. $8+6\sqrt{2}$。

829. 設複數 $|z|=1$，則 $|z+\frac{2}{z}+1|$ 之最大值爲 ________。 (100永春高中代理)

答. 4。

830. 若函數 $y=\frac{\sin^2 x+\sin x+1}{\cos^2 x-\sin x-3}$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則 $2M+m=$ ________。

答. $-\frac{45}{28}$。 (100台中二中)

831. 箱子裡有若干個大小相同的號碼球，其中 i 號球有 i 個($i=2k-1, k=1,2,3\ldots,50$)。從箱子裡取出一球，每球被取的機會均等。今計算該球之球號與某數 a 之差的絕對值。爲使這些差的絕對值之期望值爲最小，求 a 值爲 ________。 (100文華高中)

答. 71。

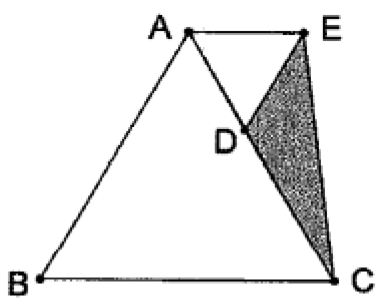
832. 箱子裡有大小相同的號碼球 120 個，其中 i 號球有 i 個，$i=1,2,3,\ldots,15$，從箱子裡一直取球 (取後放回)，每取一球就計算該球之球號與某整數 n 的差的絕對值，使得這些差的期望值爲最小，則 n 值 ________。 (101中科實中)

答. 11。

評. $\frac{n(n+1)}{2}\approx\frac{n^2}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\approx\frac{1}{2}\cdot(\frac{n}{\sqrt{2}})^2$。

833. 右圖中，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 均爲正三角形，若此兩正三角形的面積之和爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，則 $\triangle CDE$ 的面積之最大值爲何？ (97家齊女中)

答. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{8}$。



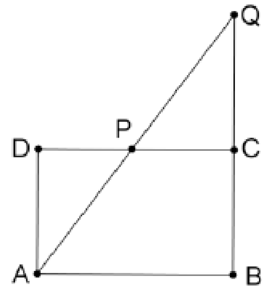
解. 令兩正三角形邊長爲 $x>y$，則 $x^2+y^2=1$。$\triangle CDE$ 面積 $=\frac{1}{2}(x-y)y\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-y)y$。
令 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$，則 $(x-y)y=\frac{\sin 2\theta+\cos 2\theta}{2}-\frac{1}{2}$。
當 $2\theta=\frac{\pi}{4}$ 時，面積有最大值 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{8}$。

834. 設 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，求 $\frac{3+\sin x-\cos^2 x}{1+\sin x}$ 的最小值。 (97南港高工)

答. $2\sqrt{2}-1$。

解. $\frac{3+\sin x-\cos^2 x}{1+\sin x}=\frac{\sin^2 x+\sin x+2}{1+\sin x}=(1+\sin x)+\frac{2}{1+\sin x}-1$。
由算幾不等式 $\frac{(1+\sin x)+\frac{2}{1+\sin x}}{2}\ge\sqrt{2}\Rightarrow$當 $\sin x=\sqrt{2}-1$ 時，有最小值 $2\sqrt{2}-1$。

835. 如右圖，矩形 $ABCD$，$\overline{AB}=4, \overline{BC}=1$，若過 A 點作一直線交 $\overline{CD}$ 於 P，且與 $\overline{BC}$ 邊的延長線交於 Q，若使 $\triangle ADP$ 與 $\triangle CPQ$ 的面積和爲最小，求此時 $\overline{DP}$ 的長度爲 ________。 (102文華高中)



答. $2\sqrt{2}$。

解. 令 $\overline{DP}=x, \overline{CQ}=y$，由 $\triangle ADP\sim\triangle QCP$
得 $1:x=y:(4-x)\Rightarrow y=\frac{4-x}{x}$。
面積和 $\frac{1}{2}\left(x+(4-x)\cdot\frac{4-x}{x}\right)=x+\frac{8}{x}-4$。
由算幾不等式得 $\frac{x+\frac{8}{x}}{2}\ge\sqrt{8}=2\sqrt{2}\Rightarrow x+\frac{8}{x}\ge4\sqrt{2}$。
故 $x=2\sqrt{2}$ 時，有最小值 $4\sqrt{2}-4$。

836. 設 $f(a,n)=(61-a-28b)^2+(62-a-29b)^2+(60-a-30)^2+(58-a-31b)^2+(59-a-32b)^2$，當 $f(a,b)$ 有最小值時，求此時數對 $(a,b)=$ ________。

答. $(84,-\frac{4}{5})$。 (102文華高中)

解. 令 $A=\begin{bmatrix}1&28\\1&29\\1&30\\1&31\\1&32\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}61\\62\\60\\58\\58\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，則 $f(a,n)=|Ax-c|^2$。
則最小值發生在 $A^TAx=A^Tc$ 時，即 $\begin{bmatrix}5&150\\150&4510\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300\\8992\end{bmatrix}\Rightarrow a=84$, $b=-\frac{4}{5}$。

837. ⋆ 若 a,b,c 爲正實數，則 $\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$ 的最小值爲 ____。 (102建國中學)

答. $12-17\sqrt{2}$。

解. 令 $(x,y,z)=(a+2b+c,a+b+2c,a+b+3c)$，則 $(a,b,c)=(-x+5y-3z,x-2y+z,z-y)$。
原式可改寫爲 $\frac{-x+2y}{x}+\frac{4x-8y+4z}{y}+\frac{8y-8z}{z}=-17+\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}+\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}$。
注意 $a,b,c>0\Rightarrow x,y,z>0$。
由算幾等式可得 $\frac{\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}}{2}+\frac{\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}}{2}\ge2\sqrt{2}+4\sqrt{2}$，且等式成立之條件爲 $x:y:z=1:\sqrt{2}:2$。

故得 $\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}\geq -17+12\sqrt{2}$，且成式成立之條件爲 $a:b:c=(5\sqrt{2}-7):(3-2\sqrt{2}):(2-\sqrt{2})$。