1. 三角形 ABC，若 $p=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，$q=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，$r=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，
試證：$pq+qr+rp>0$。

$\boxed{\text{證}}$：令 $\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$

$$p=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$$

$$q=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(c^2+a^2-b^2\right)$$

$$r=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

$$\begin{aligned}
pq+qr+rp&=\frac{1}{4}\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right)\\
&=\frac{-1}{4}\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\right)\\
&=\frac{-1}{4}\left(\left(a^2-b^2\right)^2-2c^2\left(a^2+b^2\right)+c^4\right)\\
&=\frac{-1}{4}\left((a+b)^2(a-b)^2-2c^2\left(a^2+b^2\right)+c^4\right)\\
&=\frac{-1}{4}\left((a+b)^2-c^2\right)\left((a-b)^2-c^2\right)\\
&=\frac{-1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\\
&=\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)>0
\end{aligned}$$