

## 2009年全美區域數學聯盟賽ARML思考賽

說明：思考賽題共值50分。每個小題的分數值都用方括號標出。若要得滿分，解答必須清晰可讀，條理清楚，且簡明扼要。如果題目要求“列出”或“計算”，你不必寫出過程。如果題目要求是“確定”或“找出”，那麼你必須寫出全過程，或者把你的思路解釋清楚，才能得分；這種解釋不必很長。如果題目要求是“證明”，那麼你的解答必須是嚴格的證明。前面的題目的結果可以用來證明後面的題目，即使你沒能證明前面題目的結果。但是反過來不行。（例如，可以用第2題的結果來證明第5題，即使你沒有解出第2題。但是不允許用第5題的結果來證明第2題）。最後上繳的答卷必須在每頁頂端按次序註明頁號。每頁答卷紙只能寫單面。在封面上寫團隊編號（不要寫隊名）。不要寫任何其他識別團隊的標誌。

---

### 本題的設定

一個  $n$  位標籤是數字1到  $n$  的一個排列。例如， $J = 35214$  是一個5位標籤， $K = 132$  是一個3位標籤。給定一個不大於  $n$  的正整數  $p$ ，一個  $n$  位標籤中的連續個數字稱為一個數字段。例如，若  $p = 3$ ， $L = 263415$  則263、634、341和415都是數字段。對於每個這樣的數字段，我們定義一個  $p$  位標籤來對應該數字段中各數字的相對大小。例如，對於  $L = 263415$  我們有以下四個3位標籤：

$\underline{\quad} \rightarrow 263415 \quad \underline{132} \rightarrow 263415 \quad \underline{312} \rightarrow 263415 \quad \underline{231} \rightarrow 263415 \quad \underline{213}$

在  $n$  位標籤中從左到右一共有  $n \uparrow p + 1$  個這樣的數字段，所以我們得到一個由  $n \uparrow p + 1$  位標籤組成的  $(n \uparrow p + 1)$ -元數組。例如，對於  $L = 263415$  我們得到這樣一個4元數組  $(132, 312, 231, 213)$ 。這個  $(n \uparrow p + 1)$ -元數組稱為標籤  $L$  的  $p$  位特徵組（或者簡稱特徵組，如果  $p$  能從上下文看出），記為  $S_p L$ ；在特徵組中的各個  $p$  位標籤則稱為特徵窗。例如，對於  $L = 263415$  特徵窗為132、312、231和213，且

$$S_3[263415] = (132, 312, 231, 213).$$

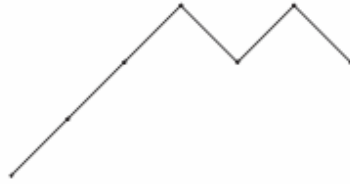
一般來講，任意一個由  $p$  位標籤組成的  $(n \uparrow p + 1)$ -元數組都稱為  $p$  位特徵組，即使我們並不知道它對應於哪一個  $n$  位標籤（甚至也不知道這樣的  $n$  位標籤是否存在）。一個剛好對應唯一的一個  $n$  位標籤的特徵組稱為單一的，一個不能對應任何  $n$  位標籤的特徵組稱為不可能的，而一個至少對應一個  $n$  位標籤的特徵組稱為可能的。

這一屆的思考賽題是分析和研究上述標籤和特徵組的一些性質。

---

1. (a) 計算52341的3位特徵組。 [1]  
(b) 找出具有和(a)中一樣3位特徵組的另一個5位標籤。 [2]  
(c) 計算具有和462135同樣的4位特徵組的另外兩個6位標籤。 [2]
2. (a) 解釋為什麼標籤1234有單一的3位特徵組。 [1]  
(b) 列出另外三個具有單一的3位特徵組的4位標籤。 [1]  
(c) 解釋為什麼3位特徵組 (123, 321) 是不可能的。 [1]  
(d) 列出另外三個恰好有兩個特徵窗的不可能的3位特徵組。 [1]

給定一個2位特徵組，我們為它定義一個圖形：以上昇和下降來表示相鄰數字的相對大小。例如，下面這個圖形對應2位特徵組 (12,12,12,21,12,21)：



一個擁有上述2位特徵組的7位標籤相當於把1到7的數字放到上面的圖形中，使得上昇時數字增大，而下降時數字減小。7位標籤2347165是下面這個圖形：

