

※ 不得使用計算機

1. 已知  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ , 令

$$f(t) = \sum_{i=1}^n |t - x_i|, \quad \text{當 } 0 \leq t \leq 1.$$

(a) 試求  $t$  之值使得  $f(t)$  達到最小值。

(b) 設  $t = d$  時,  $f(t)$  達到最大值  $M$ 。試問  $d$  及  $M$  為何?

(c) 試證明  $M \geq n/2$ 。

2. 設方程式  $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x + 1 = 0$  的四個根為  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 。試求下列方程式的解

$$\frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \frac{1}{x - \alpha_3} + \frac{1}{x - \alpha_4} = 0.$$

3. 甲乙二人參加一比賽, 於該比賽中, 甲擲 3 顆公平骰子一次, 此 3 顆骰子中 最大的點數, 為甲所得的點數; 乙擲 4 顆公平骰子一次, 此 4 顆骰子中 最大的點數, 為乙所得的點數。若甲所得的點數大於或等於乙所得的點數, 則 甲獲勝。反之, 則乙獲勝。試問甲獲勝的機率為何?

4. (a) 設

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{66} + \frac{1}{67} = \frac{p}{q},$$

其中  $p, q$  為正整數。試證  $p$  可被 101 整除。

- (b) 已知當  $n \rightarrow \infty$  時, 下列數列

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - a \log_{10} n$$

收斂, 其中  $a$  為一常數。試證

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) = a \log_{10} 2.$$