

102 年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師 編授

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績70分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文65分而且他不符合參選模範生資格。

請問下列哪一個選項的推論是正確的？

- (1) 小文的英文成績未達70分
- (2) 小文的數學成績不及格
- (3) 小文的英文成績70分以上但數學成績不及格
- (4) 小文的英文成績未達70分且數學成績不及格
- (5) 小文的英文成績未達70分或數學成績不及格

【102學測】

答：(5) **(第二冊第二章，邏輯)**

解：若小文符合資格，則小文的英文成績必須在70分(含)以上且數學成績及格
故若小文不符合資格，則小文的英文成績在70分(不含)以下，或數學成績不及格
故選(5)

解： p ：國文 ≥ 70 分， q ：英文 ≥ 70 分， r ：數學 ≥ 60 分

原命題： $(p \vee q) \wedge r$ ，否定命題： $\sim[(p \vee q) \wedge r] \equiv \sim(p \vee q) \vee \sim r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$

現已確知國文65分($\sim p$)，且符合否定命題

故英文 < 70 分($\sim q$) 或 數學 < 60 分($\sim r$)

2. 令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

- (1) $a > b > c$
- (2) $a > c > b$
- (3) $b > a > c$
- (4) $b > c > a$
- (5) $c > b > a$

【102學測】

答：(4) **(第一冊第三章，指數)**

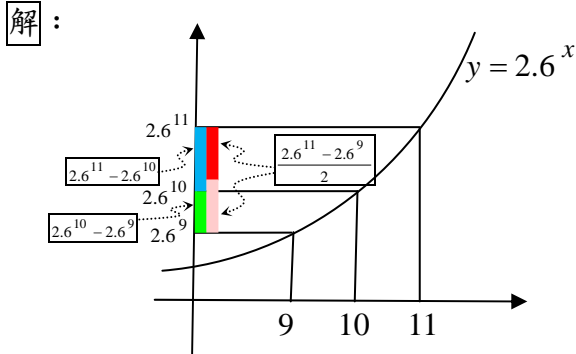
解： $a = 2.6^9 (2.6 - 1) = 2.6^9 \times 1.6$
 $b = 2.6^{10} (2.6 - 1) = 2.6^{10} \times 1.6 = 2.6^9 \times 4.16$
 $c = 2.6^9 \frac{(2.6^2 - 1)}{2} = 2.6^9 \times 1.6 \times 1.8 = 2.6^9 \times 2.88$ } 故 $b > c > a$

解： $a = 2.6^9 (2.6 - 1) = 2.6^9 \times 1.6$
 $b = 2.6^{10} (2.6 - 1) = 2.6^9 \times 1.6 \times 2.6$
 $c = 2.6^9 \frac{(2.6^2 - 1)}{2} = 2.6^9 \times 1.6 \times 1.8$ } 故 $b > c > a$

解：
$$\left. \begin{aligned} a &= 2.6^9 (2.6-1) \\ b &= 2.6^{10} (2.6-1) \end{aligned} \right\} \text{故 } b > a$$

$$c = \frac{(2.6^{11} - 2.6^{10}) + (2.6^{10} - 2.6^9)}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$\left. \right\} \text{故 } b > c > a$$



3. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。
由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，
請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？
- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{2}{3}$ 【102學測】

答：(3) **(第二冊第三章，條件機率)**

解：
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\text{白白白} \vee \text{黑黑白})}{P(\text{白白} \vee \text{黑黑})} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3}}{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}} = \frac{6+6}{18+6} = \frac{1}{2}$$

4. 已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，
請選出相關係數最小的選項。

(1)	$\begin{array}{c c c c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 1 & 13 & 1 \end{array}$	(2)	$\begin{array}{c c c c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 3 & 10 & 2 \end{array}$	(3)	$\begin{array}{c c c c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 5 & 7 & 3 \end{array}$
(4)	$\begin{array}{c c c c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 9 & 1 & 5 \end{array}$	(5)	$\begin{array}{c c c c} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & 7 & 4 & 4 \end{array}$	【102學測】	

答：(5) **(第二冊第四章，相關係數)**

解：

x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
2	1	-4/3	-4	16/9	16	16/3
3	13	-1/3	8	1/9	64	-8/3
5	1	5/3	-4	25/9	16	-20/3
				42/9	96	-4

x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
2	3	-4/3	-2	16/9	4	8/3
3	10	-1/3	5	1/9	25	-5/3
5	2	5/3	-3	25/9	9	-15/3
				42/9	38	-4

x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
2	5	-4/3	0	16/9	0	0
3	7	-1/3	2	1/9	4	-2/3
5	3	5/3	-2	25/9	4	-10/3
				42/9	8	-4

x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
2	9	-4/3	4	16/9	16	-16/3
3	1	-1/3	-4	1/9	16	4/3
5	5	5/3	0	25/9	0	0
				42/9	32	-4

x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
2	7	-4/3	2	16/9	4	-8/3
3	4	-1/3	-1	1/9	1	1/3
5	4	5/3	-1	25/9	1	-5/3
				42/9	6	-4

故： $r_5 < r_3 < r_4 < r_2 < r_1 < 0$

解：因為迴歸直線(最適合直線)皆相同，故 $m = r \times \frac{S_y}{S_x}$ 、 (\bar{X}, \bar{Y}) 均相同

由 x 數據均相同，故 S_x 均相同，故『只須比較 S_y 』即可『推論出 r 』

$$\text{第一組 } \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{Y})^2 = 16 + 64 + 16 = 96 \quad \text{第二組 } \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{Y})^2 = 4 + 25 + 9 = 38$$

$$\text{第三組 } \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{Y})^2 = 0 + 4 + 4 = 8 \quad \text{第四組 } \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{Y})^2 = 16 + 16 + 0 = 32$$

$$\text{第五組 } \sum_{i=1}^3 (y_i - \bar{Y})^2 = 4 + 1 + 1 = 6 \quad \text{故：} S_{y5} < S_{y3} < S_{y4} < S_{y2} < S_{y1}$$

則： $|r_5| > |r_3| > |r_4| > |r_2| > |r_1|$ ，但 m 、 r 均為負數，

故： $r_5 < r_3 < r_4 < r_2 < r_1 < 0$

解：事實上，本題根本不用計算，

經直觀判斷，只有(5)數據最符合直線關係(相關係數最接近-1)

5. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。
每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。
(1) 55 (2) 66 (3) 132 (4) 198 (5) 253 【102學測】

答：(2) **(第二冊第二章，排列組合)**

解：黃、綠兩籃都裝「正奇數顆」，而共 24 個雞蛋，故綠籃必裝「正偶數顆」，
所求即 $(2a+1)+(2b+1)+(2c+2)=24 \Rightarrow a+b+c=10$ 的非負整數解

$$\text{即 } H_{10}^3 = C_{10}^{12} = C_2^{12} = 66 \text{ 種}$$

解：所求即 $(2a+1)+(2b+1)+(d+1)=24$

$$\Rightarrow 2a+2b+d=21 \text{ 的非負整數解}$$

$$\text{當 } d=1 \Rightarrow a+b=10 \Rightarrow \text{共 11 組解}$$

$$\text{當 } d=3 \Rightarrow a+b=9 \Rightarrow \text{共 10 組解}$$

$$\text{當 } d=5 \Rightarrow a+b=8 \Rightarrow \text{共 9 組解}$$

$$\text{當 } d=7 \Rightarrow a+b=7 \Rightarrow \text{共 8 組解}$$

$$\text{當 } d=9 \Rightarrow a+b=6 \Rightarrow \text{共 7 組解}$$

$$\text{當 } d=11 \Rightarrow a+b=5 \Rightarrow \text{共 6 組解}$$

$$\text{當 } d=13 \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow \text{共 5 組解}$$

$$\text{當 } d=15 \Rightarrow a+b=3 \Rightarrow \text{共 4 組解}$$

$$\text{當 } d=17 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow \text{共 3 組解}$$

$$\text{當 } d=19 \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow \text{共 2 組解}$$

$$\text{當 } d=21 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \text{共 1 組解}$$

6. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10:00 熱氣球的仰角為 30° ，
到上午 10:10 仰角變成 34° 。請利用下表判斷到上午 10:30 時，
熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

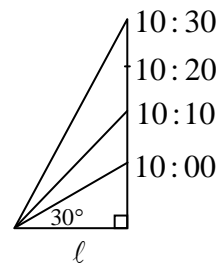
θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin \theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos \theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan \theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

- (1) 39° (2) 40° (3) 41° (4) 42° (5) 43°

【102學測】

答：(3) **(第三冊第一章，三角測量)**

解： $l \tan 30^\circ + 3[l \tan 34^\circ - l \tan 30^\circ] = l \tan \theta$
 $\Rightarrow 3 \times 0.675 - 2 \times 0.577 = 2.025 - 1.154 = 0.871 \approx \tan 41^\circ$



二、多選題

7. 設 n 為正整數，符號 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 自乘 n 次。

令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。

(1) $a_2 = 1$

(2) a_1, a_2, a_3 為等比數列

(3) d_1, d_2, d_3 為等比數列

(4) b_1, b_2, b_3 為等差數列

(5) c_1, c_2, c_2 為等差數列

【102學測】

答：(1)(2)(3)(5) **(第四冊第三章，矩陣乘法)**

解： $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle 1, 3, 7 \rangle,$$

$$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle, \langle d_1, d_2, d_3 \rangle = \langle 2, 4, 8 \rangle$$

解：若此題是要求出『一般項』規律，則：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + c_n \\ b_{n+1} = b_n + d_n \\ c_{n+1} = 2c_n \\ d_{n+1} = 2d_n \end{cases}$$

其中 $c_1 = 0$ ，故 c_n 恆為 0

又 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n$ ，故 a_n 恆為 1

又 $d_1 = 2$ ， $d_{n+1} = 2d_n$ ，故 d_n 必為 2^n

至於 $b_1 = 1$ ， $b_{n+1} - b_n = d_n$ ，故 $b_n = b_1 + (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = 2^n - 1$

8. 設 $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (1) $(-a)^7 > (-a)^9$ (2) $b^{-9} > b^{-7}$ (3) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$
 (4) $\log_a 1 > \log_b 1$ (5) $\log_a b \geq \log_b a$ 【102學測】

答：(1)(2) **(第一冊第三章，對數)**

解：(3) 應為 $\log_{10} \frac{1}{a} < 0 < \log_{10} \frac{1}{b}$

(4) 應為 $\log_a 1 = \log_b 1 = 0$

(5) 不確定大小：
$$\begin{cases} a=2, b=\frac{1}{3} \Rightarrow \log_a b = -\log_2 3 < -1 < \log_b a = -\log_3 2 \\ a=3, b=\frac{1}{2} \Rightarrow \log_a b = -\log_3 2 > -1 > \log_b a = -\log_2 3 \end{cases}$$

9. 設 $a < b < c$ 。

已知實係數多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，

且與 x 軸交於 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 兩點；

實係數多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，

且跟 x 軸相交於 $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$ 兩點。

請選出 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線 (2) 和 x 軸僅交於一點的直線
 (3) 和 x 軸無交點的拋物線 (4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
 (5) 和 x 軸交於兩點的拋物線 【102學測】

答：(4)(5) **(第一冊第二章，二次函數、方程式)**

解： $f(x) = p(x-a)(x-b)$ 、 $g(x) = q(x-b)(x-c)$ ，其中 p 、 q 均為正數
 $f(x) + g(x) = (x-b)[(p+q)x - pa - qc]$ ，其中 $p+q > 0$

表 $f(x) + g(x) = 0$ 必有兩解， $x = b$ 、 $x = \frac{pa+qc}{p+q}$

當 $b = \frac{pa+qc}{p+q}$ ，圖形為與 x 軸交於一點的拋物線

當 $b \neq \frac{pa+qc}{p+q}$ ，圖形為與 x 軸交於兩點的拋物線

10. 坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1, 0)$ 、 $Q_2(-1, 0)$ 。在下列各方程式的圖形中，

請選出其上至少有一點 P 滿足內積 $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} < 0$ 的選項。

(1) $y = \frac{1}{2}$ (2) $y = x^2 + 1$ (3) $-x^2 + 2y^2 = 1$

(4) $4x^2 + y^2 = 1$ (5) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 【102學測】

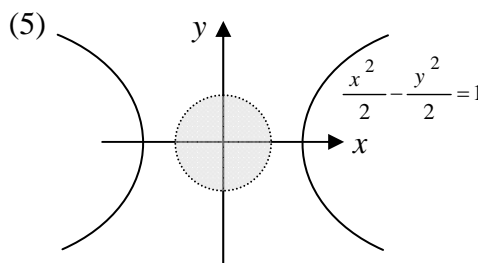
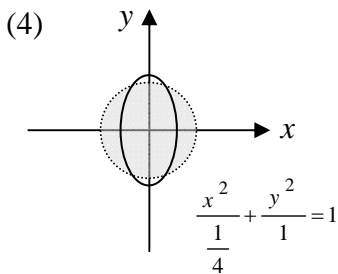
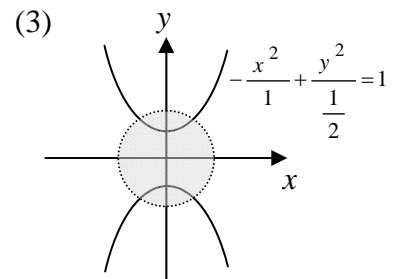
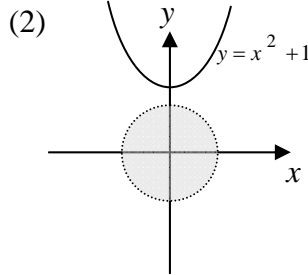
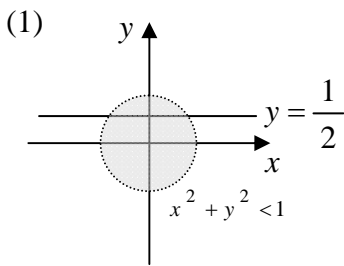
答：(1)(3)(4)

(第三冊第三章，向量內積) (第三冊第二章，圓) (第四冊第四章，二次曲線)

解： $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} = (1-x, -y) \cdot (-1-x, -y) = x^2 + y^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$ (虛灰圓)

與 $y = \frac{1}{2}$ 、 $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ 、 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$ 有交點

與 $y = x^2 + 1$ 、 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 無交點



11. 設 F_1 、 F_2 為橢圓 Γ 的兩個焦點。

S 為以 F_1 為中心的正方形 (S 的各邊可不與 Γ 的對稱軸平行)。

試問 S 可能有幾個頂點落在 Γ 上？

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 0 【102學測】

答：(1)(2)(5) (第四冊第四章，二次曲線)

解：0 個交點、1 個交點、2 個交點，直觀即可知道正確
4 個交點，直觀即可知道錯誤

若欲出現 3 個交點，勢必 $a - c = \frac{b^2}{a} \Rightarrow a^2 - ac = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = ac$

$\Rightarrow c^2 = ac \Rightarrow c = a$ (不合)

解：在不失其一般性下，令橢圓的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

以其焦半徑 $a - \frac{c}{a}x_0$ 為正方形『中心~頂點長』，

則當 $x_0 < a$ 時，橢圓上只有兩點可得等長

又當 $x_0 = a$ 時，焦半徑最短，即為橢圓右長軸頂點

若正方形很大或很小，則與橢圓無交點。

12. 設實數組成的數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，

實數組成的數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列。

已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$ 。請選出正確的選項。

- (1) $a_9 \times a_{10} < 0$ (2) $b_{10} > 0$ (3) $b_9 > b_{10}$ (4) $a_9 > a_{10}$ (5) $a_8 > b_8$

【102學測】

答：(1)(3) **(第二冊第一章，等差等比)**

解：(1) $\langle a_n \rangle$ 的公比為負，所以 a_1, a_2, a_3, \dots 必為正負相間，故 $a_9 \times a_{10} < 0$ 正確

(4) 但由於 a_1 的正負不明，所以無法決定 a_9, a_{10} 何者為正，故不能選。

(3) $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$ ，但 a_9, a_{10} 兩者中必有一個是負數，

所以 b_9, b_{10} 中也一定有負數，

而 $b_1 = 10$ ，這表示 $\langle b_n \rangle$ 是一個遞減數列，公差為負，

(2) 而且確定最遲是 b_{10} 開始變成負，

(5) 但這樣並不能確定 b_8, b_9 就已經變成負，

萬一 b_8 仍為一個小的正數，而 a_8 由於正負相間的緣故而是負數，

這樣 a_8 就不一定大於 b_8 。所以也不能選。

第貳部分：選填題

A. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【102學測】

答：16 **(第一冊第一章，整數、有理數、無理數)**

解： $k < 3\sqrt{31} < k+1 \Rightarrow k^2 < 279 < (k+1)^2$

$$\underline{16^2 = 256, 17^2 = 289} \rightarrow k = 16$$

B. 設 a, b 為實數且 $(a+bi)(2+6i) = -80$ ，其中 $i^2 = -1$ 。則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【102學測】

答： $(a, b) = (-4, 12)$ **(第一冊第二章，複數)**

解：實部 $2a - 6b = -80 \Rightarrow a - 3b = -40$

虛部 $6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

故 $a = -4, b = 12$

C. 坐標平面中 $A(a, 3), B(16, b), C(19, 12)$ 三點共線。

已知 C 不在 A, B 之間，且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 1$ ，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【102學測】

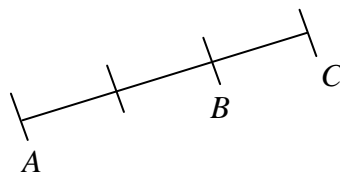
答：19 **(第三冊第三章，向量係數積、分點公式)**

解：由係數積： $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow (19-a, 9) = 3(3, 12-b) \Rightarrow a = 10, b = 9$

解：由分點公式： $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow 3(16, b) = 1(a, 3) + 2(19, 12)$$

$$\Rightarrow a = 10, b = 9$$



D. 阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；
 沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；
 第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。
 假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為 t ，
 可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 $at+b$ ，其中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【102 學測】

答： $a = -2, b = 70$ (第三冊第三章，方程組)

解：設第一天賣出 m 公斤、第二天賣出 n 公斤、第三天賣出 t 公斤

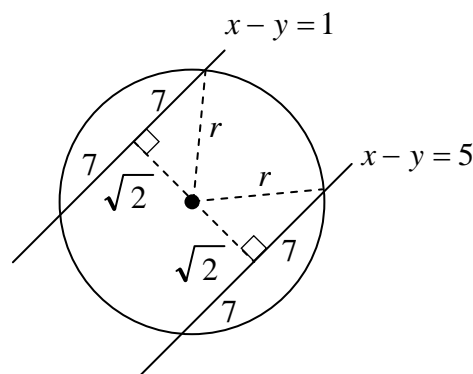
依題意：
$$\begin{cases} m+n+t=100 \\ 40m+36n+32t=3720 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } m} n = -2t + 70$$

E. 坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14。
 則此圓的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。【102 學測】

答： 51π (第三冊第二章，圓與弦)

解： $x-y=1$ 與 $x-y=5$ 相距 $\frac{|1-0-5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ，又弦長 14

故圓半徑為 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 7^2} = \sqrt{51}$ ，
 則圓面積為 51π



F. 令 \vec{A} ， \vec{B} 為坐標平面上兩向量。

已知 \vec{A} 的長度為 1， \vec{B} 的長度為 2 且 \vec{A} 與 \vec{B} 之間的夾角為 60° ，

令 $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$ ， $\vec{v} = x\vec{A} + y\vec{B}$ ，其中 x, y 為實數且符合 $6 \leq x+y \leq 8$ 以及 $-2 \leq x-y \leq 0$ ，
 則內積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。【102 學測】

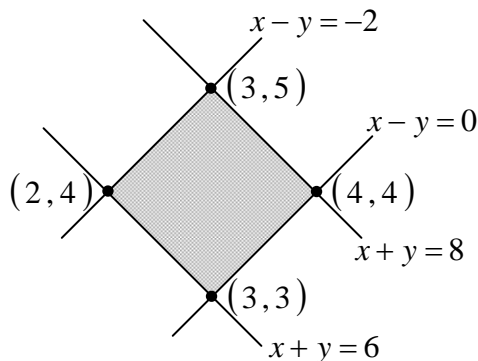
答： 31 (第三冊第三章，向量內積) (第三冊第二章，線性規劃)

解：
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (x\vec{A} + y\vec{B}) = x|\vec{A}|^2 + (x+y)\vec{A} \cdot \vec{B} + y|\vec{B}|^2$$

$$= x + (x+y) \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ + 4y = 2x + 5y \quad (\text{目標函數})$$

$\begin{cases} 6 \leq x+y \leq 8 \\ -2 \leq x-y \leq 0 \end{cases}$ 組成可行解區域 (限制範圍) 如右圖：

	$f(x, y) = 2x + 5y$
$(4, 4)$	28
依線性規劃概念： $(3, 5)$	$31 \cdots \text{Max}$
$(2, 4)$	24
$(3, 3)$	21



G. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。

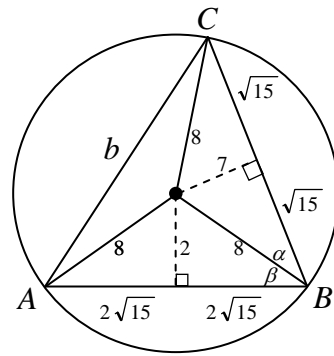
已知外接圓圓心到 \overline{AB} 的距離為 2，而到 \overline{BC} 的距離為 7，

則 $\overline{AC} =$ _____。(化成最簡根式) 【102 學測】

答： $4\sqrt{15}$ (第三冊第一章，和角公式、正弦定律)

解： $b = 2R \sin B = 2 \times 8 \times \sin(\alpha + \beta)$

$$= 16 \times \left(\frac{7}{8} \times \frac{2\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{2}{8} \right) = 4\sqrt{15}$$



H. 如下圖，在坐標空間中， A, B, C, D, E, F, G, H 為正立方體的八個頂點，

已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$ 、 $B(6,0,0)$ 、 $D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$ ，

P 在線段 \overline{CG} 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$ ， R 在線段 \overline{EH} 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$ ， Q 在線段 \overline{AD} 上。

若空間中通過 P, Q, R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，

則點 Q 的 y 坐標為 _____。(化成最簡分數) 【102 學測】

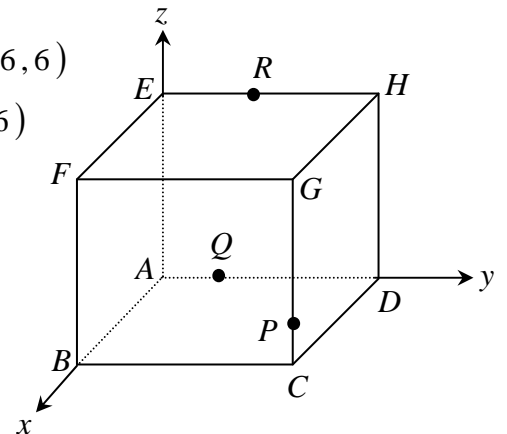
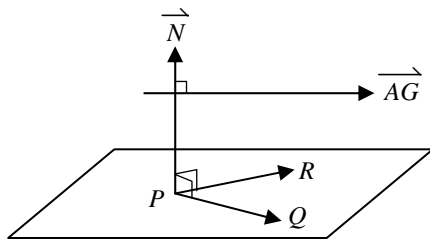
答： $\frac{15}{11}$ (第四冊第一章，空間向量、外積)

解： $P(6,6,1)$ 、 $R(0,3,6)$ 、 $Q(0,y,0)$ 、 $A(0,0,0)$ 、 $G(6,6,6)$

$$\overrightarrow{PR} = (-6, -3, 5), \overrightarrow{PQ} = (-6, y-6, -1), \overrightarrow{AG} = (6, 6, 6)$$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (33-5y, -36, 18-6y)$$

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{AG} = 6(33-5y-36+18-6y) = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{11}$$



考點分析

第一冊	第 2 題 指數	第 8 題 對數	第 9 題 二次函數	第 A 題 無理數	第 B 題 複數	
	易	中	難	易	易	
第二冊	第 1 題 邏輯	第 3 題 條件機率	第 4 題 相關係數	第 5 題 排列組合	第 12 題 等差等比	
	中	中	中	中	難	
第三冊	第 6 題 三角測量	第 C 題 係數積	第 D 題 解方程組	第 E 題 圓	第 F 題 線性規劃	第 G 題 正弦定律
	易	易	易	中	中	中
第四冊	第 7 題 矩陣	第 10 題 二次曲線	第 11 題 二次曲線	第 H 題 空間概念		
	易	難	難	中		