

# 遞迴數列

superiori

January 22, 2013

在舊版的高中數學101第14回有介紹遞迴數列的解法，不過書裡只介紹了兩種簡單(常見)型式的遞迴關係，但如果是要以準備教師甄試而言，這樣是不夠的，尤其是在100年及101年的教甄試題裡，特殊型式的遞迴關係更常出現，像是分式型式...等，高中數學101這本書的確是準備教甄的聖經，但如果在研讀的時候可以觸類旁通，建立屬於自己的筆記將會對準備考試更有幫助，以下將分類介紹。

## 1 兩項的遞迴關係

考慮首項為 $a_1$ ，遞迴關係式為 $a_{n+1} = pa_n + q$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ，其中 $p \neq 0$

型式如下列例題：

例. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，若 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = 3a_n - 1$ ，求 $a_n$ 。

100松山家商代理

(Sol.)

想法：利用等比數列

令 $a_{n+1} - k = 3(a_n - k) \Rightarrow a_{n+1} = 3a_n - 2k$ ，易知 $k = \frac{1}{2}$

$\langle a_n - \frac{1}{2} \rangle$ 是一公比為3的等比數列

$$(a_n - \frac{1}{2}) = 3^{n-1}(a_1 - \frac{1}{2}) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$$

公式整理：等號兩側同減去 $\frac{q}{1-p}$ ，使得 $\langle a_n - \frac{q}{1-p} \rangle$ 為等比數列。

## 2 三項的遞迴關係

考慮首項及次項為 $a_1, a_2$ ，遞迴關係為 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, \forall n \in \mathbb{N}$   
型式如下列例題：

例. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，若 $a_1 = a_2 = 1$ 且 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} (n \geq 3)$ ，求 $a_n$ 之一般式。

99嘉義高工

(Sol.) 題目的遞迴式可利用矩陣表示

想法：利用矩陣的特徵方程式

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$$

令  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，矩陣 $A$ 的特徵多項式

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 0-x \end{vmatrix} = x^2 - x - 2$$

特徵方程為 $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = -1$

由待定係數法，令 $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$ ，代入 $a_n$ 可得

$$\begin{cases} a_1 = 2a - b = 1 \\ a_2 = 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

公式整理：遞迴數列型式為 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ，其特徵方程式為 $x^2 + px + q = 0$

1. 若特徵方程 $x^2 + px + q = 0$ 有兩相異實根 $\alpha, \beta$ ，則令 $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$
2. 若特徵方程 $x^2 + px + q = 0$ 有兩相同實根(重根) $\alpha$ ，則令 $a_n = (A + Bn) \cdot \alpha^n$

類似的型式：已知兩數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 的首項為 $a_1, b_1$   $\begin{cases} a_{n+1} = p \cdot a_n + q \cdot b_n \\ b_{n+1} = r \cdot a_n + s \cdot b_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

例. 設有兩個首項皆為1的數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ ， $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$   
，求 $a_n$ 之一般式。

99安樂高中

### 3 特殊型式的遞迴關係

這份筆記主要要討論的就是特殊型式的遞迴式，在求解特殊型式 $\langle a_n \rangle$ 的一般式時，有許多種技巧可以使用，例如：先考慮數列的倒數、觀察數列的規律用數學歸納法證明...等作法，但在此我們會僅討論分式型的遞迴數列以及給出「固定」的解法，首先先用三個例題說明。

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 遞迴定義式為 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{5a_{n-1}}{3a_{n-1} + 4}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
，求一般項 $a_n$ 。

99鳳新高中

(Sol.)

倒數法

觀察遞迴式，發現將 $a_n$ 倒數之後可得 
$$\frac{1}{a_n} = \frac{3a_{n-1} + 4}{5a_{n-1}} = \frac{3}{5} + \frac{4}{a_{n-1}}$$

令 $b_n = \frac{1}{a_n}$ ，可以得到 $a_n$ 的遞迴式為

$$b_n = \frac{4}{5}b_{n-1} + \frac{3}{5} \Rightarrow b_n - 3 = \frac{4}{5}(b_{n-1} - 3)$$

$\langle b_n - 3 \rangle$ 為公比為 $\frac{4}{5}$ 的等比數列

$$b_n - 3 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}(b_1 - 3) \Rightarrow b_n = 3 + (-2) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{5^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot 4^{n-1}}$$

2. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_0 = 1$ 且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ ，求 $a_{2012}$ 。

101內湖高中

(Sol.) 先找出數列的規律

$$\begin{aligned}n = 1 \text{時}, a_1 &= \frac{a_0}{1 + 0a_0} = \frac{1}{1} \\n = 2 \text{時}, a_2 &= \frac{a_1}{1 + 1a_1} = \frac{1}{2} \\n = 3 \text{時}, a_3 &= \frac{a_2}{1 + 2a_2} = \frac{1}{4} \\n = 4 \text{時}, a_4 &= \frac{a_3}{1 + 3a_3} = \frac{1}{7} \\n = 5 \text{時}, a_5 &= \frac{a_4}{1 + 4a_4} = \frac{1}{11} \\n = 6 \text{時}, a_6 &= \frac{a_5}{1 + 5a_5} = \frac{1}{16} \cdots \text{等}\end{aligned}$$

觀察分母，假設數列 $\langle b_n \rangle = \langle 1, 2, 4, 7, 11, 16 \cdots \rangle$ ，可得知數列 $\langle b_n \rangle$ 的規律為

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$b_2 - b_1 = 1$$

$$b_3 - b_2 = 2$$

$$b_4 - b_3 = 3$$

$$b_5 - b_4 = 4$$

$$\vdots$$

$$b_n - b_{n-1} = n - 1$$

將上列式子全部相加，可得 $b_n - b_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)$

$$\Rightarrow b_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n^2 - n + 2}$$

所以接著利用數學歸納法證明我們對的猜測。

Step1.  $n = 0$ 時， $a_0 = \frac{2}{0^2 - 0 + 2} = 1$ ，成立。

Step2. 假設 $n = k$ 時，原式 $a_k = \frac{2}{k^2 - k + 2}$ ，成立。

Step3.  $n = k + 1$ 時，

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + ka_k} = \frac{\frac{2}{k^2 - k + 2}}{1 + k \frac{2}{k^2 - k + 2}} = \frac{2}{k^2 + k + 2} = \frac{2}{(k+1)^2 - (k+1) + 2}$$

所以當  $n = k + 1$ 時，原示亦成立，由數學歸納法得知

$$a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Note.此題亦可使用倒數法

在前面兩個例題，都是分式型的遞迴式，現在要討論的是，是否有一般化的作法解決上列這種型式的遞迴式，以下的作法是利用不動點解遞迴數列。(詳細推導過程可以參考數學傳播的文章「徐瀝泉·王繼岳·陳漢冶，遞歸數列與不動點」)

1. 設數列  $\langle a_n \rangle$  遞迴定義式為  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{5a_{n-1}}{3a_{n-1} + 4}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ，求一般項  $a_n$ 。

Step1. 解不動點  $x$ ， $x = \frac{5x}{3x + 4}$ ，解出不動點  $x = 0$  or  $x = \frac{1}{3}$  (相異實根)

Step2. 考慮  $\frac{a_n - 0}{a_n - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5a_{n-1}}{3a_{n-1} + 4} - 0}{\frac{5a_{n-1}}{3a_{n-1} + 4} - \frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right) \frac{a_{n-1} - 0}{a_{n-1} - \frac{1}{3}} \Rightarrow \langle \frac{a_n}{a_n - \frac{1}{3}} \rangle$  為等比數列，  
公比為  $\frac{5}{4}$ 。

$$\frac{a_n}{a_n - \frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \frac{a_1}{a_1 - \frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow a_n = \frac{5^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot 4^{n-1}}$$

2. 設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_0 = 1$  且  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ ，求  $a_{2012}$ 。

Step1. 解不動點  $x$ ， $x = \frac{x}{1 + nx}$ ，解出不動點  $x = 0$  (重根)

Step2. 考慮  $\frac{1}{a_{n+1} - 0} = \frac{1}{\frac{a_n}{1 + na_n} - 0} = \frac{1 + na_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = 2$$

$$\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} = 3$$

$$\vdots$$

$$+ ) \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = n - 1$$

---


$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n} = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = 1 + \frac{[1 + (n - 1)](n - 1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$$

公式整理：遞迴數列型式為  $a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$ ，其不動點方程式為  $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$

1. 若不動點方程式  $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$  有兩相異實根  $\alpha, \beta$ ，則考慮  $\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = r \cdot \frac{a_{n-1} - \alpha}{a_{n-1} - \beta}$   
數列  $\langle \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \rangle$  為等比數列，公比為  $r$ 。

2. 若不動點方程式  $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$  有兩相同實根(重根)  $\alpha$ ，則考慮

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_{n-1} - \alpha} + k$$

( $k$  可能是常數或者是與  $n$  相關的數)

關於分式型式的遞迴數列解法很多，不過在可以學會一般化的作法是比較理想的，尤其是當不定點解出來是重根的時候，解法非常特殊，一定要熟練。

## 4 衍伸類題

當然還有許多類型的遞迴型式，像是100年文華高中是利用找循環的規律，

已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ ，若 $f(2) = 2011$ ，試求 $f(f(2))$

100文華高中

99年師大附中是利用三角函數的半角公式，

設 $a_0 = \frac{1}{2}$ 且 $a_n = \left(\frac{1+a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n(1-a_n)$ 之值為？

99師大附中

100年松山家商則是遞迴式的變形，

設 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ， $(a_{n+2}^3) \frac{(a_{n+1})^4}{a_n}$ ，其中 $n$ 為任意正整數，則數列 $a_n$ 之極限。

100松山家商

需要透過練習累積經驗才能在考場上有所表現，遞迴數列的考題在教師甄試實在是太常見了，以下是一些考古題的整理。

1. 設數列 $a_1 = 1, a_2 = 3$ ，且 $a_n a_{n+1} a_{n+2} = 2(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$ 且 $a_n a_{n+1} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ，試求 $\sum_{n=1}^{100} a_n = ?$

101中正預校

2. 已知平面上的點排列 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ ，各點座標的定義如下：

$$x_1 = 1, y_1 = 0, x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n$$

(a) 能使 $x_n + \alpha y_n = \beta(x_{n-1} + \alpha y_{n-1})$ 成立的正實數 $\alpha, \beta$ 值，則數對 $(\alpha, \beta)$ ？

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (a, b)$ ，則數對 $(a, b)$ ？

101內湖高工二招

3. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 
$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = \frac{3a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 3}, n \geq 1 \end{cases}, \text{ 求一般項 } a_n ?$$

101台中二中二招

4. 數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴定義式為 
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n, n \geq 1 \end{cases}, \text{ 求數列一般項 } a_n ?$$

101竹北高中二招

5. 設 $n \in \mathbb{N}$ ，兩數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 滿足 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 5b_n + 2b_{n+1} \\ b_{n+1} = 5a_n - 2a_{n+1} \end{cases}$$

(a) 試求二階方陣 $A$ ，使得 
$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

(b) 已知 $a_{100} = 5^{50}$ ， $b_{100} = 3 \cdot 5^{50}$ ，試求 $a_1, b_1$ 之值。

101明倫高中

6. 設數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 滿足 $a_0 + b_0 = 2$ ，且對每一個正整數 $n$ 恆有 $a_n = \sqrt{3}a_{n-1} - b_{n-1}$ 以及 $a_n = a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1}$ ， $a_{18} + b_{18} = ?$

101基隆女中代理

7. 設 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ ， $n$ 為自然數，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值為？

101新北高中聯招

8. 已知實數數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 滿足 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$
  
，求級數 $\frac{1}{a_1 + 3} + \frac{1}{a_2 + 3} + \frac{1}{a_3 + 3} + \dots + \frac{1}{a_{2012} + 3}$ 之和的整數部分。

101彰化高中



9. 設  $f(x) = \frac{1+x}{1-3x}$ 。令  $f_1(x) = f(f(x))$ ，且  $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ， $n \geq 2$  且  $n \in \mathbb{N}$ ，則  $f_{2012}(2012)$  之值為？

101松山家商

10. 已知  $a_0 = 1$ ，且  $a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + (a_{n-1})^2}$  其中  $n$  為任意正整數。試證：

$$a_n \leq \frac{3}{4\sqrt{a_n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

101松山家商

11. 設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 2$  且  $a_n = \frac{2a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2}$ ， $\forall n \geq 2$ ，求一般項  $a_n$ 。

101台中一中

12. 設有兩數列  $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$  已知  $a_1 = 1$ ， $b_1 = -1$  且  $a_{n+1} = 2a_n - b_n$  及  $b_{n+1} = 2b_n$ ，(其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ )，求  $a_{100}$  與  $b_{100}$ 。

101中正高中二招

13. 設一數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 5$  且滿足遞迴關係式： $a_n = 2 + \frac{1}{3}a_{n-1}$ ， $n \geq 2$  求一般項  $a_n$ 。

101中和高中二招

14.  $x_n$  為正實數數列， $x_1 = \frac{3}{4}$  且滿足  $(x_{k+1})^2 = (x_k)^4 + 2(x_k)^3 + (x_k)^2$ ，求

$$\left[ \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \frac{1}{a_3 + 1} + \dots + \frac{1}{a_{202} + 1} \right]$$

101板橋高中

15. 已知兩數列 $\langle a_n, b_n \rangle$ 有以下的關係：

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_n - 10b_n \\ b_{n+3} = 2a_n - 7b_n \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{n+5} = 7a_n - 25b_n \\ b_{n+5} = 5a_n - 18b_n \end{cases}$$

其中 $n$ 為自然數。若 $a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ,  $b_{n+1} = ra_n + sb_n$ 式求數對 $(p, q, r, s)$ 。

101復興高中二招

16. 二數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 具有 $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 1$   $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 求 $a_n$ 之一般式。

101新化高中代理

17. 若數列 $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ 且 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 。

100文華高中代理

18. 設 $f(x)$ 表定義域為正整數的的函數，且 $f(1) = 999$ ，又對 $n \geq 2$ 的任意正整數 $n$ 恆有 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ ，求 $f(999)$ 。

100玉井工商

19. 一數列 $1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 10, -1, 1, 0, \cdots$ ，求 $a_n$ (用 $n, \omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ )

100南科實中

20. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ 且 $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 求

(a)  $a_n = ?$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

100基隆高中

21. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足， $a_1 = \frac{1}{7}$ 、 $a_2 = \frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1} = \frac{7}{2}a_n \cdot (1 - a_n)$ ， $n \geq 1$ ，則 $a_{2011} - a_{100} = ?$

100嘉義高中代理

22. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 6$ 且 $a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{n} + n + 1 (n \in \mathbb{N})$ ， $n \geq 2$ ，則這個數列的一般項 $a_n$ ？

100中正高中二招

23. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 6$ 且 $a_{n+1} = \frac{2a_n - 9}{a_n - 4}$ ， $(n \in \mathbb{N})$ ， $n \geq 2$ ，則這個數列的一般項 $a_n$ ？

100東山高中

24. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 之 $a_1 = 0$ ， $a_2 = 1$ ， $\dots$ ， $a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{3}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )，求 $a_n$ ？

100南港高工

25. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(93) = 93$ ，且對每一個正整數 $n$ ， $f(n) + f(n+3) = n^2$ 恆成立，則 $f(30) = ?$

100慈濟高中

26. 設數列 $\langle F_n \rangle$ 滿足， $F_1 = F_2 = 1$ ， $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，若 $x^2 - x + 1 = 0$ 之二根為 $\alpha$ ， $\beta$ ，其中 $\alpha > \beta$ ，試證：

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

100嘉義女中

27. 數列 $\langle a_n \rangle$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = \frac{1}{3}$ ，若 $a_n a_{n+1} + a_{n+1} a_{n+2} = a_n a_{n+2}$ ，求 $a_n$ ？

100中壢高中二招

28. 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ ，已知 $a_1 = 3$ ， $5a_{n+1} = 3a_n + 2$ ， $n \geq 2$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則 $a_n$ 之一般式？

99中興高中

29. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 3a_n + 2n - 2$ ， $\forall n \geq 1$ ，試求數列 $\langle a_n \rangle$ 之一般式？

99中壢高中二招

30. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列， $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_3 = a_4 = 2$ ，滿足

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} \cdot a_{n+4} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{200} = ?$

99桃園聯招

31. 已知一數列滿足 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，且 $a_2 = 7$ ， $a_6 = 127$ ，求 $a_{10}$ ？

99高雄聯招

32. 已知一數列滿足 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = a_2 = 1$ ，且 $a_{n+2} = \frac{(a_{n+1})^2 + 2}{a_n}$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$

試證：數列 $\langle a_n \rangle$ 每項均為整數

99高雄中學

33. 正整數的遞增數列， $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 符合 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，其中 $n \neq 1$ 。若 $a_7 = 120$ ，求 $a_8 = ?$

99彰化藝術高中

34. 已知一數列滿足 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $2a_{n+1} + a_n = 3$ ，且 $a_1 = 10$ ，設前 $n$ 項和為 $S_n$ ，則滿足不等式 $|S_n - n - 6| < \frac{1}{250}$ 的最小正整數 $n$ 為何？

99基隆女中

35. 設 $\alpha, \beta$ 為相異二實數，且 $\alpha > \beta > 0$ ，定義數列 $\langle a_n \rangle$ 如下：

$$a_1 = \alpha + \beta ; a_n = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{a_{n-1}} , \forall n \geq 2$$

(a) 試證： $a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$

(b) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

99全國聯招