

一題多解

superiori

January 21, 2013

一個好的題目常常會有許多種解法，可以從代數或是幾何的觀點切入，在這個主題裡我們會用一個常見的教甄試題來探索一下一題多解的奧妙。

假設 $x, y \in \mathbb{R}$ ，若 $x^2 + xy + y^2 = 1$ ，則 $x^2 + y^2$ 之最大值及最小值為何？(本題源自高中數學101)

1 利用題目本身限制

法一：利用題目條件 $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{令 } x^2 + y^2 = k$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx^2 + kxy + ky^2 = k \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$$

將第一式乘 k 減去第二式，可得

$$(k-1)x^2 + kxy + (k-1)y^2 = 0 \quad (1.1)$$

(1) $y \neq 0$ ，則將方程(1.1)同除以 y^2 ，得到方程(1.2)

$$(k-1)\left(\frac{x}{y}\right)^2 + k\left(\frac{x}{y}\right) + (k-1) = 0 \quad (1.2)$$

$\because x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$ ，方程(1.2)有實根，判別式 $D = k^2 - 4(k-1)^2 \geq 0$

$$k^2 - [2(k-1)]^2 \geq 0 \Rightarrow (-k+2)(3k-2) \geq 0 \Rightarrow (k-2)(3k-2) \leq 0$$

$$\frac{2}{3} \leq k \leq 2 \quad (1.3)$$

由方程(1.3)得知 $\frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 2$

(2) $y = 0$ ，帶回原題易得 $x = \pm 1$

由上列討論得知， $x^2 + y^2$ 之最大值為2，最小值為 $\frac{2}{3}$

2 二次曲線

利用另一個角度來討論這個題目，我們可以知道這是非標準式的二次曲線，可以利用不變量來解題。

法二：利用旋轉不變量以及橢圓參數式

利用二次曲線的不變量，可以得到

$$\begin{cases} a' + c' = 2 \\ a' - c' = \sqrt{(1-1)^2 + 1^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{3}{2} \\ c' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

也就是說二次曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 將軸旋轉 θ 後 ($\cot 2\theta = \frac{a-c}{b}$)，得到標準型橢圓 Γ

$$\Gamma: \frac{3}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 = 1$$

由橢圓的參數式可以得知， $x' = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta, y' = \sqrt{2} \sin \theta$

又 $\cot 2\theta = \frac{a-c}{b} \Rightarrow \theta = 45^\circ \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

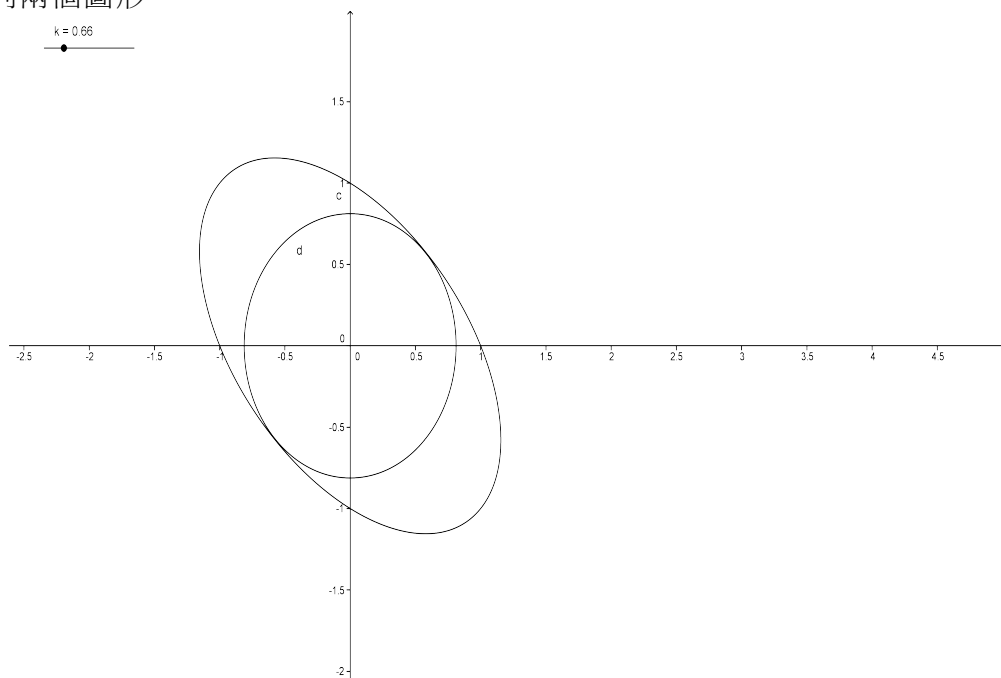
$$\text{所求 } x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = (x')^2 + (y')^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta\right)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta)^2 = \frac{2}{3}\cos^2\theta + 2\sin^2\theta = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sin^2\theta$$

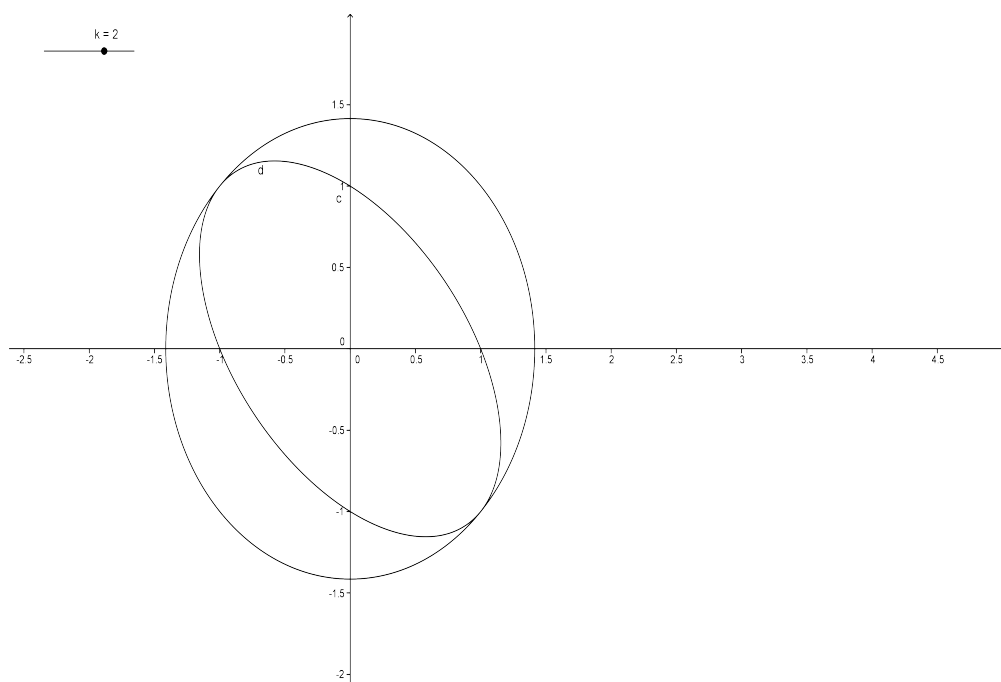
由上列討論得知， $x^2 + y^2$ 之最大值為2，最小值為 $\frac{2}{3}$

3 幾何觀點

在看完旋轉的方法之後，我們可以站在幾何的觀點來觀察 $x^2 + y^2 = k$ 的圖形是一個圓，而 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 是一個斜的橢圓，可以知道他們相切的時候，恰好就是極值，如下列兩個圖形



上圖相切時， k 為半短軸長的平方， k 之最小值為 $\frac{2}{3}$



上圖相切時， k 為半長軸長的平方， k 之最小值為2

4 微積分求極值

微積分在求極值上扮演著重要的角色，這裡要介紹的式利用拉格朗日乘數法 (Lagrange multiplier method) 求極值。

法三：Lagrange multiplier method

$$\text{令 } f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1, g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = \lambda g \Rightarrow (2x + y, x + 2y) = \lambda(2x, 2y)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2\lambda x \\ x + 2y = 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - 2\lambda)x + y = 0 \\ x + (2 - 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

由上列的方程可以解得 $\lambda = \frac{3}{2}$ 或 $\lambda = \frac{1}{2}$

$$(1) \lambda = \frac{3}{2} \text{ 代回可得 } x = y$$

將 $x = y$ 代回原方程 $x^2 + xy + y^2 = 1$ ，可得 $3x^2 = 1 \Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$$

(2) $\lambda = \frac{1}{2}$ 代回可得 $-x = y$

將 $x = y$ 代回原方程 $x^2 + xy + y^2 = 1$ ，可得 $x^2 = 1 \Rightarrow (x, y) = (1, -1), (-1, 1)$

$$x^2 + y^2 = 2$$

由上列討論得知， $x^2 + y^2$ 之最大值為2，最小值為 $\frac{2}{3}$

其實從上列三個方法，我們可以發現第三個方法不但能算出最大值以及最小值，更可以求得極值發生在哪個點，其實前兩個方法也可以求初極值發生的點，就留給大家思考。

5 衍伸類題

接著來看一些類似的考古題

1. (a) $x \in \mathbb{R}$ ，求 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ 之最大值為 M 為？最小值為 m 為？
 (b) 繪出 $y = g(x) = [\log_2 f(x)] + 2$ 之圖形，其中 $[a]$ 表示不大於 a 之最大整數

高中數學101

2. 設 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ ， x 為任意實數，則 $f(x)$ 之範圍為？

99松山家商代理

3. 設 x, y 為實數，且滿足 $x^2 + xy + y^2 = 6$ ，若 $x^2 + y^2$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，試求 $M + m = ?$

100全國聯招

4. 設 x 為實數， $t = \log_{\frac{1}{9}} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) = ?$

(100嘉義高中代理)

5. 設 $x, y \in \mathbb{R}$ ，且 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$ ，若 $x^2 + y^2$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m = ?$

100南港高工

6. x, y 為實數，已知 $x^2 + xy + y^2 = 3x + 3y + 9$ ，若 $x^2 + y^2$ 的最大值為 M ，最小值為 N ，則數對 $(M, N) = ?$

100慈濟高中

7. x, y 為實數，且 $x^2 + xy + y^2 = 6$ ，則 $x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) = ?$

101竹山高中、101南港高工

在教甄而言，一題多解算是一個很重要的技能，在這拋磚引玉，剩下的就留給大家慢慢思考。