

四、在 $\triangle ABC$ 中，設點 D 與 E 在 \overline{BC} 上且 $\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=1:1:1$ ，點 F 與點 G 在 \overline{CA} 上且 $\overline{CF}:\overline{FG}:\overline{GA}=3:1:1$ ，點 H 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AH}:\overline{HB}=1:3$ 。試證： \overline{AE} 、 \overline{DG} 與 \overline{FH} 交於一點 P ，並求 $\overline{FP}:\overline{PH}$ 。

(1) 以坐標方法證明：設頂點的坐標分別為 $A(0,0), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ 。(10分)

(2) 以向量方法證明：考慮以 B 點為始點的各有關向量。(10分)

五、給定坐標平面上的一錐線 $C: 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 0$ 。

(1) 若直線 $L: \begin{cases} x = 3 + \alpha t \\ y = 1 + \beta t \end{cases} (t \in \mathbf{R})$ 與錐線 C 相切，試求斜率 $\frac{\beta}{\alpha}$ 的所有可能值。

(10分)

(2) 若過點 $T(u, v)$ 有一對垂直線與錐線 C 都相切，試證： $u^2 + v^2 - 10 = 0$ 。

(10分)