

國立臺灣師範大學九十五學年度在職進修碩士班入學考試試題

普通數學 科試題（數學教學班 用，本試題共 2 頁）

滿分一百分

- 注意：
1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
 2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分。
 3. 考試時可攜帶英文字典（不得攜帶電子字典）

一、(1) 試證： $\cos 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times (\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5}-1)$ 。(10 分)

(2) 試證： $\cos 3^\circ$ 是無理數，而且此數也像 $\cos 27^\circ$ 一樣地，其表示式只需使用有理數、四則運算記號與二次方根。(10 分)

二、將每個大於 1 的正整數 k 因數分解成質數乘幂的乘積時，令 $p(k)$ 表示其中質數 2 的乘幂。亦即： $p(k)$ 是一非負整數、 $2^{p(k)}$ 是 k 的因數、但 $2^{p(k)+1}$ 不是 k 的因數。

(1) 試證：對每個大於 1 的正整數 n ，只有一個正整數 k ($1 < k \leq n$) 能使 $p(k)$ 等於集合 $\{p(m) \mid m \in N, 1 < m \leq n\}$ 的最大值。(10 分)

(2) 試證：對每個大於 1 的正整數 n ， $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 都不是整數。(10 分)

三、試證：在四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ ，則四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形。

(1) 以坐標方法證明：設頂點的坐標分別為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 與 $D(x_4, y_4)$ 。(10 分)

(2) 以向量方法證明：設 $\vec{u} = \overline{AB}$ ， $\vec{v} = \overline{BC}$ ， $\vec{w} = \overline{CD}$ 。(10 分)