

一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區） 筆試（二）

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，
第四題 4 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個實數數列， $x_1=1$ ， $x_2=2$ 且滿足對於所有正整數 n ，

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)。$$

證明： $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{2k+1} - x_{2k-1}) = \frac{2}{3}$

【參考解答】

(1)對於所有正整數 n ，

$$\because x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$$

$$\therefore x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(x_n - x_{n-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)對於所有正整數 k ，由(1)可得

$$\begin{aligned} x_{2k+1} - x_{2k-1} &= x_{2k+1} - x_{2k} + x_{2k} - x_{2k-1} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}(x_{2k+1} - x_{2k-1}) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

二、已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+5)f(x) - f(x) + f(x+5) + 1 = 0$ ，且 $f(1) = 3$ ，
求 $f(2011)$ 之值？。

【參考解答】 $f(x+5) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$

$$f(x+10) = \frac{f(x+5)-1}{f(x+5)+1} = \frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}+1} = \frac{-1}{f(x)}$$

$$f(x+20) = \frac{-1}{f(x+10)} = f(x)$$

$$f(2001) = f(20 \times 200 + 1) = f(1) = 3$$

$$f(2011) = \frac{-1}{f(2001)} = \frac{-1}{3}$$

三、從正整數 $1, 2, 3, \dots, 20$ 中任意取出四個數令為 a_1, a_2, a_3, a_4 ，並將其排序，使得 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ，且滿足 $a_2 - a_1 \geq 3$ ， $a_3 - a_2 \geq 4$ ， $a_4 - a_3 \geq 5$ ，則滿足這些條件的數共有多少種取法？

【參考解答】

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (20 - a_4) = 20$$

$$a_1 + (a_2 - a_1 - 2) + (a_3 - a_2 - 3) + (a_4 - a_3 - 4) + (21 - a_4) = 12$$

每一項均 ≥ 1

$$\text{故 } \binom{11}{4} = 330$$

四、證明當 $n \geq 14$ ， n 可以表示成 $3l + 8m$ ， l 及 m 為正整數或零。

(例如： $14 = 2 \times 3 + 1 \times 8, 15 = 3 \times 5, 16 = 2 \times 8$)

【參考解答】：利用數學歸納法證明如下：

(1) $14 = 2 \times 3 + 1 \times 8, 15 = 3 \times 5$ 。

(2) 當 $k \geq 15$ ，假設 $k = 3l + 8m$ ，

(i) 若 $m = 0$ ，此時 $l > 5$ ，令 $l_1 = l - 5, m_1 = 2$ ，則 $k + 1 = 3l_1 + 8m_1$ 。

(ii) 若 $m \neq 0$ ，此時 $m > 1$ ，令 $l_1 = l + 3, m_1 = m - 1$ ，則 $k + 1 = 3l_1 + 8m_1$ 。

故得證。

五、在六個人當中，任兩個人或者互相認識、或者互相不認識，證明這六人當中會有兩個人認識一樣多的人。

【參考解答】

假設這六人認識的人數都不一樣，則他們認識的人數分別為 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。設甲認識 5 人，而乙認識 0 人，則甲認識乙，而乙不認識甲，與甲和乙必須或者互相認識、或者互相不認識矛盾，得證。