

100 學年度台灣省第四區(新竹高中)  
高級中學數理及資訊學科能力競賽  
數學科筆試(一) 試題

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

**注意事項：**

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

**問題一：** 設  $p$  為質數， $m, n$  為正整數，且  $m < n$ 。試證：在  $m, n$  之間、以  $p$  為分母的所有最簡分數的總和為  $\frac{(p-1)(n^2-m^2)}{2}$ 。 (16 分)

**【解】**

因為  $p$  是質數，所以所有在  $m, n$  之間、分母為  $p$  的分數中，只要不能約分成整數的，就在我們所求之和。因此所求為

$$\begin{aligned}\sum_{k=mp}^{np} \frac{k}{p} - \sum_{k=m}^n k &= \frac{1}{p} \cdot \frac{(np+mp)(np-mp+1)}{2} - \frac{(n+m)(n-m+1)}{2} \\ &= \frac{m+n}{2} \cdot [np-mp+1-n+m-1] \\ &= \frac{(n+m)(n-m)(p-1)}{2} = \frac{(p-1)(n^2-m^2)}{2}.\end{aligned}$$

故得證。 □

**問題二：** (1) 設數列  $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ ，其中  $n$  是自然數。試證：對所有的自然數  $n$ ， $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$  均成立。 (8 分)

(2) 試求  $[(1+\sqrt{2})^{100}]$  的個位數字 (其中  $[x]$  表示不超過實數  $x$  之最大整數)。 (8 分)

**【解】**

(1) 若  $n > 1$ ，則

$$\begin{aligned}2a_n &= [(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})] a_n \\ &= [(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})] [(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n] \\ &= [(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}] + (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) [(1+\sqrt{2})^{n-1} + (1-\sqrt{2})^{n-1}] \\ &= a_{n+1} - a_{n-1}.\end{aligned}$$

所以  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ，對於所有自然數  $n$  皆成立。

(2)  $[(1+\sqrt{2})^{100}]$  的個位數字是 3。

設  $b_n = a_n \pmod{10}$ ，根據餘式定理知  $b_{n+2} \equiv 2b_{n+1} + b_n \pmod{10}$ ，又根據鴿籠原理知  $b_n$  在某一項之後必會循環（兩項組和最多只有 100 種情形，所以連續計算 101 項的話，其中必有循環）。因此逐項計算找出循環，

$$[b_n]_{n \in \mathbb{N}} = [2, 6, 4, 4, 2, 8, 8, 4, 6, 6, 8, 2, 2, 6, \dots],$$

觀察出此數列從  $n=1$  開始每 12 個為 1 個週期。所以可求得  $b_{100} = b_4 = 4$ ，但  $0 < (1-\sqrt{2})^{100} < 1$ ，所以  $[(1+\sqrt{2})^{100}]$  的個位數字為  $4-1=3$ 。

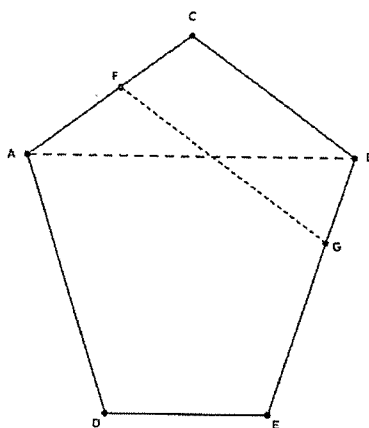
□

**問題三：**考慮平面上所有的五個內角皆為  $108^\circ$  的五邊形所成的集合  $\mathcal{P}$ 。對於  $P \in \mathcal{P}$ ，將  $P$  的五條邊每次選取其中兩條，得到 10 種不同的組合；令  $i(P)$  為所選的邊長度相等的組數。例如對正五邊形  $P_0$ ，有  $i(P_0) = 10$ 。

(1) 試構造一個五邊形  $P \in \mathcal{P}$  滿足  $i(P) = 2$ 。 (7 分)

(2) 試求函數  $i: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$  的所有可能取值 ( $\mathbb{Z}$  為整數所成的集合)。 (10 分)

**【解】**首先證明一個引理：設  $P \in \mathcal{P}$ 。如果  $i(P) \geq 1$ ，則  $P$  必定由一個等腰三角形與一個等腰梯形相疊而成。



$i(P) \geq 1$  即表示  $P$  至少有兩個邊長度相等。分兩種情形討論：

情況一：兩相鄰邊等長。如上圖，設  $\overline{AC} = \overline{BC}$ 。則  $\triangle ABC$  為  $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$  的等腰三角形， $\angle C = 108^\circ$ 。所以  $\angle BAD = \angle ABE = 72^\circ$ 。又  $\angle ADE = \angle DEB = 108^\circ$ ，所以四邊形  $ABED$  為等腰梯形。

情況二：兩不相鄰邊等長。一樣如上圖，不失一般性可設  $\overline{AD} = \overline{BE}$ 。因為  $\angle ADE = \angle DEB = 108^\circ$ ，所以四邊形  $ABED$  成等腰梯形，並且  $\angle BAD = \angle ABE = 72^\circ$ 。由於  $\angle CAD = \angle CBE = 108^\circ$ ，所以  $\triangle ABC$  為  $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$  的等腰三角形。

(1) 綜上所述，如果  $P \in \mathcal{P}$  有兩條邊等長，則  $P$  中等長的邊至少有兩組： $\overline{AC} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AD} = \overline{BE}$ 。所以只要取  $\overline{AC} \neq \overline{AD}$ ，我們就得到一個五邊形  $P$  滿足  $i(P) = 2$ 。

(2) 函數  $i: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$  的所有可能取值為 0, 2, 10。

首先我們證明當  $i(P) \geq 3$  時，必有  $i(P) = 10$  (即  $P$  為正五邊形)。如果  $i(P) \geq 3$ ，則在某三組等長的邊中必有共同邊，因此可以得到至少有三邊等長。如果這等長的三邊是相鄰邊，則由此三邊的兩端點所連成的對角線，必為  $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$  的等腰三角形的底邊，而得到上面的等腰三角形的腰長等於下面等腰梯形之腰長；故得此五邊形為正五邊形。

如果此等長的三邊不完全相鄰，則其中相鄰的兩邊會是  $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$  的等腰三角形的兩腰，因此該等腰三角形的底邊長已知。由此底邊長與原來的共同邊長所形成的  $108^\circ - 108^\circ - 72^\circ - 72^\circ$  的等腰梯形，其腰長必與較短底邊長相等。於是又得一正五邊形。因此命題 " $i(P) \geq 3 \implies i(P) = 10$ " 得證。

接著由 (1) 之前的討論，我們知道  $i(P) \geq 1$  就能得到  $i(P) \geq 2$ 。在 (1) 中我們已經造出  $i(P) = 2$  的例子，所以從 1 到 10 的整數中只有 2 和 10 在  $i$  的值域中。

最後我們造一個  $i(P) = 0$  的例子。如上圖，將  $\overline{BC}$  邊平行移動至  $\overline{FG}$ 。容易看出除了有限多種移動方法以外，其他的五邊形  $ADEGF$  都是內角全等、但五邊皆不等長的五邊形。□