

**台灣省第一區一百學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(二)試題**

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 求 $x^{50} + x^5 + 1$ 除以 $x^3 + x$ 的餘式為 $x^2 + x + 1$ 。

2. 若 p 為質數且 $x^2 + px - 444p = 0$ 之兩根均為整數，則 $p =$ 37。

3. 設 P 為 $\triangle ABC$ 所在平面上一點，滿足 $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = 0$ ，則 $\triangle BPC$ 面積： $\triangle APC$ 面積的比值為 $\frac{2}{3}$ 。

4. 設 $f(x) = |x^2 - 3x| - x + 1$ ，則方程式 $f(f(x)) = -2$ 的實數解有多少個？2。

5. 一個公正的骰子擲 n 次，若至少出現一次 6 點的機率大於 0.95，則 n 之最小值為 17。($\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$)

6. 將一個半徑為 5 公分的鐵球，放入一個邊長 10 公分的正方體容器，再放入另一個小鉛球，然後蓋上正方體容器的蓋子，使蓋子與正方體完全密合，則這個鉛球的最大半徑為 $5(2 - \sqrt{3})$ 公分

7. 在空間中，球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 有兩點 $A(3, 0, 1)$ ， $B(1, \sqrt{5}, 2)$ 。設 γ 為連接 A 點到

B 點的最短球面路徑，則 γ 的中點坐標為 $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{3})$ 。