

台灣省第一區一百學年度 高級中學數學及自然科能力競賽 數學科筆試(一)試題

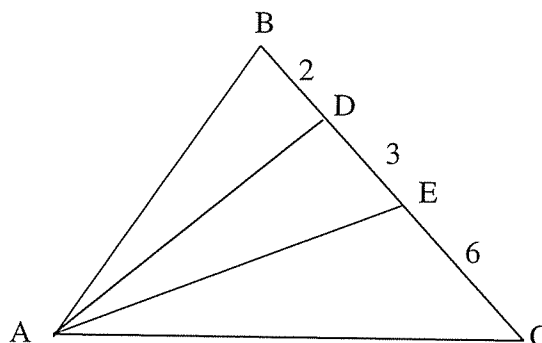
注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】如圖， $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 三等份線交 \overline{BC} 於 D 、 E 。若 $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{EC} = 6$ ，

求 $\overline{AB} = ?$

解：



let $\overline{AB} = x$ ， $\overline{AD} = y$ ，

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{3}{6} \Rightarrow \overline{AC} = 2y$$

$$\triangle ABD \rightarrow \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 4}{2\overline{AB} \cdot \overline{AD}} = \cos \angle BAD = \cos \angle DAE = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 9}{2\overline{AD} \cdot \overline{AE}} = \cos \angle EAC = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 - 36}{2\overline{AE} \cdot \overline{AC}}$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 4}{2xy} = \frac{\frac{9}{4}x^2 + y^2 - 9}{3xy} \\ \frac{x^2 + y^2 - 4}{2xy} = \frac{\frac{9}{4}x^2 + 4y^2 - 36}{6xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 12 \\ 3x^2 - 4y^2 = -96 \end{cases} \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

【問題二】如圖 $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle CFG$ 分別為邊長 a 、 b 、 c 的正三角形，其中 C 在

\overline{AG} 上， D 在 \overline{BC} 上， F 在 \overline{CE} 上， \overline{DG} 交 \overline{CF} 於 I ， \overline{AI} 交 \overline{CD} 於 J 。求

$\overline{DJ}:\overline{CJ}$ 的比值。(12 分)

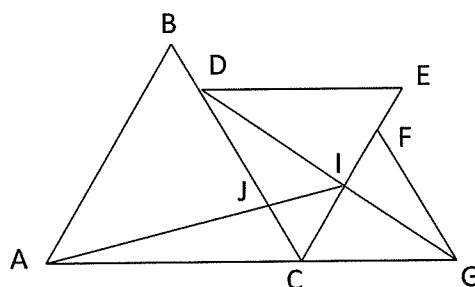
解： $\triangle DEI \sim \triangle GCI$ (A.A)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{IE}}{\overline{IC}} &= \frac{\overline{DE}}{\overline{CG}} \Rightarrow \frac{\overline{IE} + \overline{IC}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{DE} + \overline{CG}}{\overline{CG}} \\ \text{得} \quad \Rightarrow \frac{b}{\overline{IC}} &= \frac{b+c}{c} \Rightarrow \overline{IC} = \frac{bc}{b+c} \end{aligned}$$

$\triangle ABJ \sim \triangle ICJ$ (A.A)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BJ}}{\overline{JC}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{IC}} \Rightarrow \frac{\overline{BJ} + \overline{JC}}{\overline{JC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{IC}}{\overline{IC}} \\ \Rightarrow \frac{a}{\overline{JC}} &= \frac{a + \frac{bc}{b+c}}{\frac{bc}{b+c}} = \frac{ab+bc+ac}{bc} \\ \text{得} \quad \Rightarrow \overline{JC} &= \frac{abc}{ab+bc+ca} \\ \Rightarrow \overline{DJ} &= b - \frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{b(ab+bc)}{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

故 $\overline{DJ}:\overline{CJ} = b(ab+bc):abc = (ab+bc):ac$ 比值為 $\frac{b(a+c)}{ac}$ 。



【問題三】有一個各位數字都不相同且都不為 0 的四位數，將這四位數的各位數字重

新排列，可得一個最大數和一個最小數(例如：2793 經重排後，最大數為

9732，最小數為 2379)，如果如得的最大數與最小數的差恰好就是此四位

數，試求所有這種四位數。

解：設此四位數為 $xyzu$ ，最大數為 $ABCD$ ，其中 $A > B > C > D$ ，則最小數為 $DCBA$ ，

$$\begin{array}{c} ABCD \\ \text{由 } -) DCBA \text{ 可知,} \\ \hline xyzu \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 10 + D - A = u \\ 10 + C - 1 - B = z \\ B - 1 - C = y \\ A - D = x \end{array} \right. , \text{可得下列關係式,} \quad \left\{ \begin{array}{l} u + x = 10 \\ z + y = 8 \\ B - C = y + 1 \geq 2 \\ A - D = x \geq y + 3 \geq 4 \end{array} \right.$$

因此 (x, y, z, u) 有 3 種情形 $(4, 6, 7, 1)$ 、 $(6, 4, 5, 3)$ 、 $(7, 3, 6, 2)$ 。檢驗之後，發現只有 6174 符合。所已答案為 6174。

A:6174

【問題四】設 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ ($n \geq 1$)。證明：

(1) 對任意固定的正整數 n 及對任意的正整數 k ，存在一個整數 c_k ，使得

$$a_{n+k} = c_k a_n + 1。$$

(2) 若 $m \neq n$ ，則 a_m ， a_n 互質。

解：(1) By induction on k ，

$k=1$ ，take $c_1 = a_n - 1$ 。Then $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 = a_n(a_n - 1) + 1 = a_n c_1 + 1$ 。

Assume $k = h \geq 1$ 時， $\exists c_h$ ，sth $a_{n+h} = c_h a_n + 1$

When $k = h+1$ ， $a_{n+h+1} = a_{n+h}(a_{n+h} - 1) + 1 = a_{n+h} c_h a_n + 1$ 。

\therefore Take $c_{h+1} = a_{n+h} c_h$

We are done.

(2)

May assume $m > n$ ，take $k = m - n$ 。Then， $a_m = c_{m-n} a_n + 1$ 。

Any divisor of a_m, a_n is also a divisor of 1。

$\therefore (a_m, a_n) = 1$