

玖、100 學年度各分區複賽試題及參考解答

台北市 100 學年度 高級中學數理及資訊學科能力競賽 數學科筆試（一）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：試證：若 $\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B} + \frac{\sin^4 A}{\sin^2 B} = 1$ ，則 $\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A} + \frac{\sin^4 B}{\sin^2 A} = 1$ 。 (12 分)

解：首先，不難檢驗出 $\sin A, \sin B, \cos A, \cos B$ 都不等於 0。

其次，利用 $1 = \sin^2 A + \cos^2 A$ ，則有 $\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B} + \frac{\sin^4 A}{\sin^2 B} = \sin^2 A + \cos^2 A$ 。

通分後可得到 $\sin^2 B \cdot \cos^4 A + \cos^2 B \cdot \sin^4 A = \sin^2 B \cdot \cos^2 B \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A)$ ，
依此進行化簡：

$$\begin{aligned} & \sin^2 B \cdot \cos^2 A \cdot (\cos^2 A - \cos^2 B) + \sin^2 A \cdot \cos^2 B \cdot (\sin^2 A - \sin^2 B) = 0 \\ \Rightarrow & \sin^2 B \cdot \cos^2 A \cdot (\cos^2 A - \cos^2 B) + \sin^2 A \cdot \cos^2 B \cdot (\cos^2 A - \cos^2 B) = 0 \\ \Rightarrow & (\cos^2 A - \cos^2 B) \cdot (\sin^2 B \cdot \cos^2 A - \sin^2 A \cdot \cos^2 B) = 0 \\ \Rightarrow & (\cos^2 A - \cos^2 B) \cdot [(1 - \cos^2 B) \cdot \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) \cdot \cos^2 B] = 0 \\ \Rightarrow & (\cos^2 A - \cos^2 B)^2 = 0 \\ \Rightarrow & \cos^2 A = \cos^2 B \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

因此 $1 - \sin^2 A = 1 - \sin^2 B$ ，即 $\sin^2 A = \sin^2 B \quad \dots\dots\dots (2)$

利用(1)(2)兩式，可得 $\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A} + \frac{\sin^4 B}{\sin^2 A} = \frac{\cos^4 B}{\cos^2 B} + \frac{\sin^4 B}{\sin^2 B} = \cos^2 B + \sin^2 B = 1$ 。

【另解】令 $a = \sin^2 A, b = \sin^2 B$ ，則已知條件等價於 $\frac{(1-a)^2}{1-b} + \frac{a^2}{b} = 1$ ，即

$$b(1-a)^2 + a^2(1-b) = b(1-b)，整理得 (b-a)^2 = 0，故 b = a。$$

問題二：已知 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 是一遞增的等比數列，且滿足以下兩個條件：

(i) 每一項 x_k 都是 3^m 的形式，其中 m 為正整數，

$$(ii) \sum_{k=1}^8 \log_3 x_k = 308 \text{ 且 } 56 \leq \log_3 \left(\sum_{k=1}^8 x_k \right) \leq 57。$$

試求 x_{100} 之值。

(12 分)

解：設 $x_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots, 100$ ，則

$$308 = \sum_{k=1}^8 \log_3 x_k = \sum_{k=1}^8 (\log_3 a + (k-1)\log r) = 8\log_3 a + 28\log_3 r。 \dots\dots\dots(1)$$

若 $r=1$ ，則 $308 = 8\log_3 a$ ，得知 $x_1 = a = 3^{\frac{77}{2}}$ 不合，故公比 $r \neq 1$ 。

又 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 遞增且都是 3^m 的形式，可得 $r \geq 3$ ，且 r 也是 3^m 的形式。
另一方面，

$$\log_3 \left(\sum_{k=1}^8 x_k \right) = \log_3 \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \log_3 \left(ar^7 \cdot \frac{1-\frac{1}{r^8}}{1-\frac{1}{r}} \right) = \log_3 a + 7\log_3 r + \log_3 \frac{1-\frac{1}{r^8}}{1-\frac{1}{r}}。$$

其中前兩項 $\log_3 a$ 與 $\log_3 r$ 都是整數，而 $1 < \frac{1-\frac{1}{r^8}}{1-\frac{1}{r}} < \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1} < 3$ ，故

$$0 < \log_3 \frac{1-\frac{1}{r^8}}{1-\frac{1}{r}} < 1$$

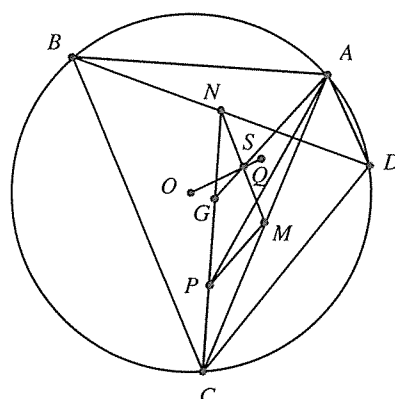
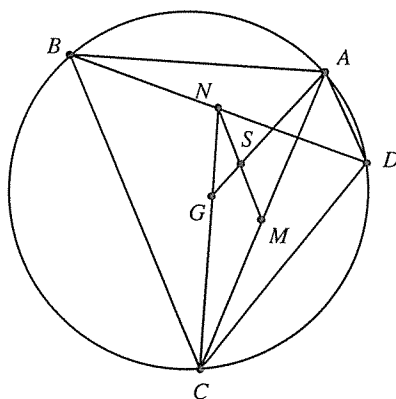
再由條件 $56 \leq \log_3 \left(\sum_{k=1}^8 x_k \right) \leq 57$ ，可推得 $\log_3 a + 7\log_3 r = 56$ 。………(2)

解聯立式(1)(2)，可得 $a = 3^{21}, r = 3^5$ ，故 $x_{100} = ar^{99} = 3^{21} \cdot 3^{495} = 3^{516}$ 。

問題三：設 $ABCD$ 是一圓內接四邊形，點 M 與點 N 分別是 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的中點，點 S 是 \overline{MN} 的中點，試證：

(1) 若點 G 是 $\triangle BCD$ 的重心，則點 S 在 \overline{AG} 上且 $\overline{SA} = 3\overline{SG}$ 。(6 分)

(2) 四個三角形 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 與 $\triangle ABC$ 的重心共圓。(7 分)



解：

(1) 設點 P 是 \overline{CG} 的中點，則點 P 與點 G 是 $\triangle BCD$ 的中線 \overline{CN} 上的兩個三等分點。在 $\triangle PMN$ 中，點 G 與 S 分別是兩邊的中點，所以，線段 \overline{SG} 與 \overline{MP} 平行且 $\overline{SG} = (1/2)\overline{MP}$ 。同理，在 $\triangle ACG$ 中，點 M 與 P 分別是兩邊的中點，所以，線段 \overline{MP} 與 \overline{AG} 平行且 $\overline{MP} = (1/2)\overline{AG}$ 。因為線段 \overline{SG} 與 \overline{AG} 都過點 G 且都與 \overline{MP} 平行，所以，點 A 、 S 、 G 共線而且 $\overline{SG} = (1/4)\overline{AG}$ 。

因為點 M 是 \overline{AC} 的中點，所以，點 C 與點 A 位於直線 MN 的異側。因為點 G 是 \overline{CN} 的三等分點，所以，點 C 與點 G 位於直線 MN 的同側。於是，點 A 與點 G 位於直線 MN 的異側。因為點 S 在直線 MN 上，所以，點 A 與點 G 位於點 S 的異側，亦即：點 S 在 \overline{AG} 上。因為點 S 在 \overline{AG} 上且 $\overline{AG} = 4\overline{SG}$ ，所以， $\overline{SA} = 3\overline{SG}$ 。

(2) 設四邊形 $ABCD$ 的外接圓圓心為點 O 而外接圓半徑為 r 。在直線 OS 上作出點 Q 使得：點 O 與點 Q 位於點 S 的異側而且 $\overline{SO} = 3\overline{SQ}$ 。在 $\triangle SAO$ 與 $\triangle SGQ$ 中，因為

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SG}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SQ}} (=3), \quad \angle ASO = \angle GSQ (\text{對頂角相等}),$$

所以， $\triangle SAO$ 與 $\triangle SGQ$ 相似。由此可知： $3\overline{QG} = \overline{OA} = r$ 。於是， $\triangle BCD$ 的重心 G 在以點 Q 為圓心、 $r/3$ 為半徑的圓上。

同理可證：三角形 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 與 $\triangle ABC$ 的重心也在此圓上。

問題四：對正整數 n ，若存在 n 個連續整數的平方和之算術平均數仍為完全平方數，則稱 n 為「金整數」，例如： $n=17$ 是一個金整數，這是因為

$$\frac{(-7)^2 + (-6)^2 + \cdots + 9^2}{17} = \frac{425}{17} = 25 = 5^2。$$

(1) 試證：若 n 為金整數，則 n 除以 6 的餘數必為 1 或 5。 (5 分)

(2) 試求出 2 到 100 的正整數中所有的金整數。 (7 分)

解：若 n 為金整數，則存在整數 k 及 a 滿足： $\frac{k^2 + (k+1)^2 + \cdots + (k+n-1)^2}{n} = a^2$ 。

可設 $k+n-1 \geq 1$ 。若 k 為正整數，則

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{k+n-1} m^2 - \sum_{m=0}^{k-1} m^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{(k+n-1)(k+n)(2k+2n-1)}{6} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} \right) \\ &= k^2 + (n-1)k + \frac{2n^2 - 3n + 1}{6}。 \end{aligned}$$

註：當 k 為 0 或負整數，則以上的結果一樣成立，因為

$$a^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{k+n-1} m^2 + \sum_{m=k}^0 m^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{k+n-1} m^2 + \sum_{m=1}^{-k} m^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{k+n-1} m^2 + \frac{-k(-k+1)(-2k+1)}{6} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{k+n-1} m^2 - \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \right)。$$

因此， $6 \mid 2n^2 - 3n + 1 = (2n-1)(n-1)$ 。於是，可推得 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$ 。

更進一步地，配方得到 $a^2 = \left(k + \frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n^2-1}{12}$ ，故

$$\frac{n^2-1}{12} = a^2 - \left(k + \frac{n-1}{2}\right)^2 = \left(a + k + \frac{n-1}{2}\right) \left(a - k - \frac{n-1}{2}\right)。$$

上式分解的兩數有相同的奇偶性，且至少一數是偶數，故 $\frac{n^2-1}{12}$ 必為 4 的倍數；

因此， $n^2 \equiv 1 \pmod{48}$ 。又 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$ ，可推得 $n \equiv \pm 1$ 或 $n \equiv \pm 7 \pmod{24}$ 。

反之，當 $n \equiv \pm 1$ 或 $n \equiv \pm 7 \pmod{24}$ 時， $4 \mid \frac{n^2-1}{12}$ ，故

$$\left(a + k + \frac{n-1}{2}\right) \left(a - k - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{12} = (2p)(2q)，$$

其中 p, q 可以取為滿足 $a = p + q, k = p - q - \frac{n-1}{2}$ 的整數。因此，從 2 到 100 的正整數中，共有以下 16 個數是金整數：

7, 17, 23, 25, 31, 41, 47, 49, 55, 65, 71, 73, 79, 89, 95, 97。

註：以 $n=17$ 為例， $\frac{n^2-1}{12} = 24 = 2 \cdot 12 = 12 \cdot 2 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$ ，可取

$(a, k) = (7, -13), (7, -3), (5, -9)$ 或 $(5, -7)$ 。