

# 教育部 100 學年度高級中學數學競賽 台中區複賽試題 (二) (時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

(3 分) 一、求  $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2010^2}+\frac{1}{2011^2}}$  的值。

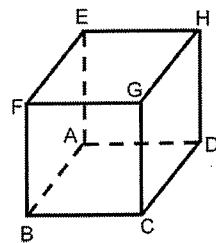
【解】

$$\because 1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{求值式}&=\sum_{n=1}^{2010}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{2010}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &=2011-\frac{1}{2011}.\end{aligned}$$

(3 分) 二、設  $P$  為正立方體  $ABCDEFGH$  內部一點，且滿足  $\overline{PA}=\overline{PB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

$\overline{PF}=\overline{PC}=\frac{\sqrt{107}}{2}$ ，求此正立方體的邊長。



【解】

設  $a$  為此立方體邊長。

定一直角座標系， $A(0,0,0)$ ， $B(a,0,0)$ ， $C(a,a,0)$ ， $F(a,0,a)$

$\because \overline{PA}=\overline{PB}$ ， $\overline{PF}=\overline{PC}$ ， $\therefore P$  必在  $\overline{AB}$  與  $\overline{CF}$  的中垂面上。

$\overline{AB}$  的中垂面為  $x=\frac{a}{2}$ ， $\overline{CF}$  的中垂面為  $y-z=0$ 。

$\therefore P$  落在直線  $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y-z=0 \end{cases}$  上。

設  $P\left(\frac{a}{2}, t, t\right)$ ， $t \in \mathbb{R}$ 。

$$\therefore \overline{PA} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{且} \quad \overline{PF} = \frac{\sqrt{107}}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{a^2}{4} + t^2 + t^2 = \frac{27}{4} \\ \frac{a^2}{4} + t^2 + (t-a)^2 = \frac{107}{4} \end{cases}$$

$$\text{解出 } a=5, t=\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad a=\frac{4\sqrt{6}}{3}, t=\frac{7\sqrt{6}}{12}.$$

$$\therefore \text{邊長為 } 5 \text{ 或 } \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$(3 \text{ 分}) \quad \frac{\tan 1^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\tan 2^\circ}{\cos 4^\circ} + \frac{\tan 4^\circ}{\cos 8^\circ} + \cdots + \frac{\tan(2^n)^\circ}{\cos(2^{n+1})^\circ} = ? \quad (\text{答案僅能以 } \tan \text{ 表示})'$$

【解】

$$\text{利用 } \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a \left(1 - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right) = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\tan a}{\cos^2 a} &= \frac{\tan a(1 + \tan^2 a)}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \tan a - \tan a(1 - \tan^2 a)}{1 - \tan^2 a} \\ &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} - \tan a = \tan 2a - \tan a \end{aligned}$$

$$\text{所以，求值式} = \tan 2^\circ - \tan 1^\circ + \tan 4^\circ - \tan 2^\circ + \cdots + \tan(2^{n+1})^\circ - \tan(2^n)^\circ$$

$$= \tan(2^{n+1})^\circ - \tan 1^\circ.$$

四、在區間  $(0,1)$  當中，隨機任選兩個相異點  $x$  和  $y$ ，即可將此區間分成長度各為  $a, b$  和  $c$  的三個子區間。已知每一個序對  $(a, b, c)$  出現的機率均等，

試問  $a, b$  和  $c$  可以作為一個三角形的三邊長的機率為何？

【解】

考慮集合  $\{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  (樣本空間)

甲、當  $x=0.5$  時，則不管  $y$  的值為何，所產生的  $a, b, c$  皆無法作為三角形的三邊長；對  $y$  亦然。

乙、當  $0 < x < 0.5$  時，

i. 若  $0 < y < x$ ，令  $a=y, b=x-y, c=1-x$ ，

則  $a+b=x < 0.5 < 1-x=c$  不能構成  $\Delta$ 。

ii. 若  $x < y < 0.5$ ，令  $a=x, b=y-x, c=1-y$ ，

則  $a+b=y < 0.5 < 1-y=c$  不能構成  $\Delta$ 。

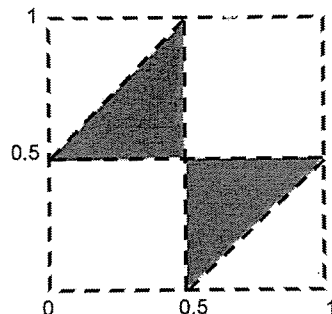
iii. 若  $y > 0.5$ ，

令  $a=x, b=y-x, c=1-y=1-a-b$ ，

則  $a+b=y > 1-y=c$  且  $b+c=1-x > x=a$ 。

另外， $a, b, c$  還要滿足  $c+a > b$ ，即  $y < x+0.5$ 。

由以上解得的解集合為右圖  $(0, 0.5), (0.5, 0.5), (0.5, 1)$  所圍區域



丙、當  $0.5 < x < 1$  時，仿照以上的方法，得解集合為右圖  $(1, 0.5), (0.5, 0.5), (0.5, 0)$  所圍區域

$$\therefore \text{所求機率} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1 \times 1} = \frac{1}{4}.$$

五、設  $f$  為一個 2010 次的多項式，且滿足  $f(k) = \frac{1}{k}$ ， $k=1, 2, 3, \dots, 2011$ 。試  
(4 分)

求  $f(2012)$  的值。

【解】

令  $g(x) = xf(x) - 1$ ，則  $g(x)$  為 2011 次多項式且其所有根為  $1, 2, 3, \dots, 2011$ 。

$\therefore g(x) = A(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)$ ，其中  $A$  為常數。

$\therefore g(0) = -1, \quad \therefore A \cdot (-1)^{2011} \cdot (2011!) = -1.$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2011!}$$

$$\therefore f(x) = \frac{g(x)+1}{x} = \frac{A(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)+1}{x}.$$

所以，  $f(2012) = \frac{\frac{1}{2011!} \cdot 2011 \cdot 2010 \cdots 1 + 1}{2012} = \frac{2}{2012} = \frac{1}{1006}$  .

六、平面上，由圖形  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ ,  $y+1 \geq (\frac{\sqrt{3}}{2}+1)x$ ,  $y+1 \geq -(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)x$  所

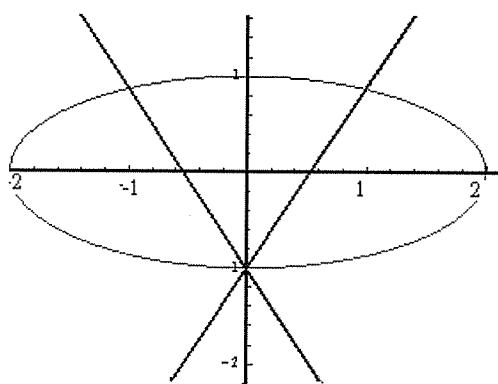
(4 分)

圍成區域之面積為何？

【解】

所圍區域如右圖  $S$  .

作平面到平面之縮放變換  $\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{2} \\ \bar{y} = y \end{cases}$



$S$  轉成右圖  $\bar{S}$  ,

而  $\bar{S}$  之面積  $= \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 150^\circ$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} .$$

因此， $S$  之面積為  $2(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} + 1$  .

