

**100 學年度台灣省第十區(屏東區)**  
**高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題**  
**數學科筆試(一)**

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 13 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。不可使用電算器。

(4)試題與答案卷一同繳回。

一、證明： $\sin \frac{\pi}{13} \sin \frac{2\pi}{13} \cdots \sin \frac{6\pi}{13} = \frac{\sqrt{13}}{2^6}$

【參考解答】 設  $\omega = \cos \frac{2\pi}{13} + i \sin \frac{2\pi}{13}$ ，則  $\omega^{13} = 1$ ，

$\omega$  是  $x^{13} - 1 = 0$  的一虛根，其餘的虛根分別是  $\omega^2$ 、 $\omega^3$ 、 $\dots$ 、 $\omega^{11}$ 、 $\omega^{12}$ 。

$$x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2) \cdots (x - \omega^{11})(x - \omega^{12})$$

令  $x = 1$  代入上式得  $13 = (1 - \omega)(1 - \omega^2) \cdots (1 - \omega^{11})(1 - \omega^{12})$ ，再兩邊取絕對值得

$$\begin{aligned} 13 &= |1 - \omega| |1 - \omega^2| \cdots |1 - \omega^{11}| |1 - \omega^{12}| \\ \therefore |1 - \omega^k| &= \sqrt{(1 - \cos \frac{2k\pi}{13})^2 + \sin^2 \frac{2k\pi}{13}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{13}} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{k\pi}{13}} = 2 \sin \frac{k\pi}{13} \\ \therefore 13 &= |1 - \omega| |1 - \omega^2| \cdots |1 - \omega^{11}| |1 - \omega^{12}| \\ &= 2^{12} \sin \frac{\pi}{13} \sin \frac{2\pi}{13} \cdots \sin \frac{6\pi}{13} \sin \frac{7\pi}{13} \sin \frac{8\pi}{13} \cdots \sin \frac{11\pi}{13} \sin \frac{12\pi}{13} \\ &= 2^{12} \sin \frac{\pi}{13} \sin \frac{2\pi}{13} \cdots \sin \frac{6\pi}{13} \sin \frac{6\pi}{13} \sin \frac{5\pi}{13} \cdots \sin \frac{2\pi}{13} \sin \frac{\pi}{13} \end{aligned}$$

$$= 2^{12} \left( \sin \frac{\pi}{13} \sin \frac{2\pi}{13} \cdots \sin \frac{6\pi}{13} \right)^2$$

$$\rightarrow \sin \frac{\pi}{13} \sin \frac{2\pi}{13} \cdots \sin \frac{6\pi}{13} = \frac{\sqrt{13}}{2^6}.$$

二、已知  $I$  為  $\triangle ABC$  的內切圓之圓心，且  $\overline{CA} + \overline{AI} = \overline{BC}$ ，如果  $\angle CBA = k\angle BAC$ ，試求  $k$  值。

【參考解答】  $k = \frac{1}{2}$

過  $C$  做射線  $\overline{CA}$ ，在  $\overline{CA}$  上取一點  $D$ ，

使得  $\overline{AD} = \overline{AI}$ ，如圖所示。

$\because \overline{CA} + \overline{AI} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{BC} \Rightarrow \triangle CDB$  為等

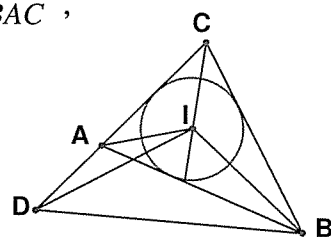
腰三角形。

又  $I$  在  $\angle DCB$  角平分線上，且  $I$  為  $\triangle ABC$  的內切圓之圓心，

$\therefore \triangle CDI \cong \triangle CBI \Rightarrow \angle CDI = \angle CBI$ ，又  $\triangle ADI$  為等腰三角形，

$\therefore \frac{1}{2}\angle CAB = \angle CAI = 2\angle CDI = 2\angle CBI = \angle CBA \Rightarrow \angle CBA = \frac{1}{2}\angle BAC$ ，

所以  $k = \frac{1}{2}$ 。



三、令  $x$  為大於零的實數，試求  $\frac{x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4}}{x}$  的最大值

【參考解答】

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4}}{x} &= \frac{(x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4})(x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4})}{x(x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4})} \\ &= \frac{4x^2}{x(x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4})} \\ \text{Sol:} \quad &= \frac{4}{\frac{1}{x}(x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4})} \\ &= \frac{4}{\left(x + \frac{2}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}\right)} \end{aligned}$$

因爲  $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$  且  $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$  所以

$$\frac{x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4}}{x} \leq \frac{4}{2\sqrt{2} + 2} = 2\sqrt{2} - 2$$

當  $x = \sqrt{2}$  時 等式成立

四、設方程式  $x^3 - x - 1 = 0$  的三個根為  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$ 。試求  $\omega_1^8 + \omega_2^8 + \omega_3^8$  的值。

【參考解答】

已知  $\omega_i^3 = \omega_i + 1$ 。可得  $\omega_i^4 = \omega_i^2 + \omega_i$ 。

及  $\omega_i^8 = (\omega_i^2 + \omega_i)^2 = \omega_i^4 + 2\omega_i^3 + \omega_i^2 = \omega_i^2 + \omega_i + 2(\omega_i + 1) + \omega_i^2 = 2\omega_i^2 + 3\omega_i + 2$ 。

所求  $\omega_1^8 + \omega_2^8 + \omega_3^8 = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + 3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + 6$ 。

由根與係數關係可得  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$  及

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 - 2(\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3) = 2。$$

即所求爲  $\omega_1^8 + \omega_2^8 + \omega_3^8 = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + 3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + 6 = 10$ 。