

**100 學年度台灣省第十區(屏東區)**  
**高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題**  
**數學科口試**

【口試題一】設  $a, b, c$ ，與  $d$  皆為正整數，如果  $a+b+c$ 、 $a+b+d$ 、 $a+c+d$  及  $b+c+d$  都是整數的平方。

(1) 試舉一例  $(a, b, c, d)$  滿足上述條件。

(2) 試證：必存在有無限多組  $(a, b, c, d)$  滿足上述條件。

【參考解答】

$$\text{首先令 } a+b+c = (3x)^2 = 9x^2,$$

$$a+b+d = (3x+3)^2 = 9x^2 + 18x + 9,$$

$$a+c+d = (3x+6)^2 = 9x^2 + 36x + 36,$$

$$b+c+d = (3x+9)^2 = 9x^2 + 54x + 81,$$

$$\text{再把這四式加起來為 } 3(a+b+c+d) = 36x^2 + 108x + 126,$$

所以  $a+b+c+d = 12x^2 + 36x + 42$ ，再利用上式扣掉前四式得到

$$a = 3x^2 - 18x - 39, \quad b = 3x^2 + 6, \quad c = 3x^2 + 18x + 33, \quad d = 3x^2 + 36x + 42$$

因為  $a, b, c, d$  都要是正數，所以  $x > 7$ ，又令  $x = 8$  代入上式，

$$\text{得到 } a = 9, b = 198, c = 396, d = 522.$$

$$\text{此時 } a+b+c = 576, \quad a+b+d = 729, \quad a+c+d = 900, \quad b+c+d = 1089.$$

因此只要  $x > 7$ ， $a, b, c, d$  必為正數，且

$a+b+c$ ， $a+b+d$ ， $a+c+d$ ，且  $b+c+d$  也為完全平方數，

所以有無限多組組合

【口試題二】設  $x, y, z$  為正實數，且  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ，試求  $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$  的最小值

【參考解答】

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2 \cdot 25 \\ &\geq \frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z} + 2 \cdot 25 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2 \cdot 25 = 25 + 2 \cdot 25 = 75 \end{aligned}$$

$$\text{此 } A^2 \geq 3 \cdot 25, \text{ 又 } A > 0 \quad \therefore A \geq 5\sqrt{3}$$

$$\text{等號成立的條件為 } \frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\because x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad \therefore x = y = z = 5 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以，當  $x = y = z = 5 \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $A$  有最小值  $5\sqrt{3}$ 。