

一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（台南區） 筆試（二）

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 3 分，第二題 6 分，第三題 6 分，第四題 6 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 x 為不等於零的正實數且滿足 $3f(5x^2) + 2f(\frac{1}{5x^2}) = 25x$ ，求 $f(5)$ 之值？

【參考解答】

$$\text{令 } x=1, \text{ 則 } 3f(5) + 2f(\frac{1}{5}) = 25$$

$$\text{令 } x=\frac{1}{5}, \text{ 則 } 3f(\frac{1}{5}) + 2f(5) = 5$$

$$\text{解方程式得 } f(5) = 13$$

二、設 p, q 是兩實數，若方程式 $2x^2 + 11x + 13 = 0$ 的兩根亦是 $x^4 - px^2 + q = 0$ 之根，試

求 $[(p-q)^2]^{2011}$ 的末三位數字(其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數)。

【參考解答】：

設 α, β 是 $2x^2 + 11x + 13 = 0$ 的兩根

因為 $2x^2 + 11x + 13 = 0$ 的判別式 $\Delta > 0$ ，所以 $\alpha \neq \beta$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0$$

由根與係數的關係知

$$\alpha + \beta = -\frac{11}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{13}{2}$$

因為 α, β 亦是 $x^4 - px^2 + q = 0$ 之根，所以

$$\alpha^4 - p\alpha^2 + q = 0 \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\beta^4 - p\beta^2 + q = 0 \cdots \cdots \cdots (2)$$

由 (1) - (2) 得 $\alpha^4 - \beta^4 - p(\alpha^2 - \beta^2) = 0$

$$\Rightarrow p = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{69}{4}$$

由 $\alpha^2 \times (2) - \beta^2 \times (1)$ 得 $(\alpha^2 - \beta^2)q + \alpha^2\beta^4 - \beta^2\alpha^4 = 0$

$$\Rightarrow q = \frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2\beta^2 = \frac{169}{4}$$

$$\text{所以 } [(p-q)^2]^{2011} = \left[\left(\frac{69}{4} - \frac{169}{4} \right)^2 \right]^{2011} = 25^{4022}$$

故 $[(p-q)^2]^{2011}$ 的末三位數字是 625

三、如右下圖，線段 AB 為以點 O 為圓心的直徑，點 C 為上半圓上的一點，已知線段 AB 的長為 5 且線段 AC 的長為 4，線段 CD 垂直線段 AB 且交線段 AB 於 D 點。圓 O_1 與圓 O 相切於 E 點且分別與線段 CD 及線段 AB 相切。圓 O_2 與圓 O 相切於 F 點，且分別與線段 CD 及線段 AB 相切。試求線段 O_1O_2 的長。

【參考解答】

$$AB = 5, AC = 4, BC = 3,$$

$$AC \cdot AC = AD \cdot AB \Rightarrow$$

$$16 = 5 \cdot AD \Rightarrow$$

$$AD = 16/5$$

$$OD = AD - AO = 16/5 - 5/2 = 7/10 = 0.7$$

$\triangle OHO_1$ 為一直角三角形，

$$OO_1 \cdot OO_1 = OH \cdot OH + O_1H \cdot O_1H$$

設圓 O_1 的半徑長為 r_1 ，由 $OO_1 = OE - r_1$ ，

$$OH = HD - OD = r_1 - OD = r_1 - 0.7$$

$$(2.5 - r_1) \cdot (2.5 - r_1) = (r_1 - 0.7) \cdot (r_1 - 0.7) + r_1 \cdot r_1$$

$$6.25 - 5r_1 + r_1 \cdot r_1 = 2r_1 \cdot r_1 - 1.4r_1 + 0.49$$

$$r_1 \cdot r_1 + 3.6r_1 - 5.76 = 0$$

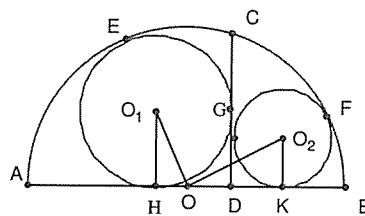
$$25r_1 \cdot r_1 + 90r_1 - 144 = 0$$

$$(5r_1 - 6)(5r_1 + 24) = 0$$

$$r_1 = 1.2$$

$\triangle OKO_2$ 為一直角三角形，

$$OO_2 \cdot OO_2 = OK \cdot OK + O_2K \cdot O_2K$$



設圓 O_2 的半徑長為 r_2 , 由 $OO_2 = OF - r_2$,

$$OK = OD + DK = OD + r_2 = 0.7 + r_2$$

$$(2.5 - r_2)^2 = (r_2 + 0.7)^2 + r_2^2$$

$$6.25 - 5r_2 + r_2^2 = 2r_2^2 + 1.4r_2 + 0.49$$

$$r_2^2 + 6.4r_2 - 5.76 = 0$$

$$25r_2^2 + 160r_2 - 144 = 0$$

$$(5r_2 - 4)(5r_2 + 36) = 0$$

$$r_2 = 0.8$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + (HK)^2} = \sqrt{(0.4)^2 + 2^2} = \sqrt{4.16}$$

四、設 $P(x)$ 為實係數多項式，且 $P(x^2) = P(x+2)P(x+6)$ 對於任意實數 x 均恆成立，求滿足這些條件的所有 $P(x)$ 。

【參考解答】

(1) 若 $P(x) = c$ 常數多項式，則 $c = c \cdot c$ 即 $P(x) = 0$ 或 $P(x) = 1$ 。

(2) 若 $P(x)$ 為非常數的 n 次多項式，設 $a \neq 0$ 即

$$P(x) = ax^n + \dots \text{ 代入已知條件得}$$

$$P(x^2) = ax^{2n} + \dots = P(x+2)P(x+6) = a^2x^{2n} + \dots$$

$$\text{所以, } a = a^2, a \neq 0 \Rightarrow a = 1$$

因此, $P(x)$ 可表示為

$$P(x) = (x-4)^n + Q(x)$$

的形式, 其中 $Q(x)$ 的次數小於 n 。

$$P(x^2) = (x^2-4)^n + Q(x^2)$$

$$P(x+2)P(x+6) = [(x+2-4)^n + Q(x+2)][(x+6-4)^n + Q(x+6)]$$

比較兩式得

$$Q(x^2) = (x-2)^n Q(x+6) + (x+2)^n Q(x+2) + Q(x+2)Q(x+6)$$

若 $Q(x) \neq 0$ 為非零 k 次多項式 ($k < n$), 設領導係數為 $b \neq 0$,

則觀察上式最高次數 $2k = n + k$ 得 $k = n$ 與 $k < n$ 矛盾,

所以, $Q(x)$ 為零多項式。

由 (1), (2) 滿足的多項式 $P(x)$ 為

$$P(x) = 0, P(x) = 1, P(x) = (x-4)^n$$

