

100學年度台灣省第四區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 12 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 12 分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

【口試一】三角形的三邊長各為 $\sqrt{89}$, $4\sqrt{5}$, 5 ，請問此三角形的面積為何？

【解】此三角形的面積為 22。

三角形的三邊長分別為 $a = \sqrt{89}$, $b = 4\sqrt{5}$, $c = 5$ 。由餘弦定理得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{80 + 25 - 89}{40\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

所以由平方關係得 $\sin A = \frac{11}{5\sqrt{5}}$ 。最後由面積公式知三角形面積等於

$$\frac{1}{2} \cdot bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{11}{5\sqrt{5}} = 22.$$

□

【口試二】設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 0$ ，且 $a_{n+1} = a_n + 1 + 2\sqrt{1+a_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。試求一般項 a_n 的公式。

【解】一般項 a_n 的公式為 $a_n = n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$ 。

首先我們觀察到 $a_{n+1} + 1 = a_n + 2 + 2\sqrt{1+a_n} = (\sqrt{1+a_n} + 1)^2$ ，且 $a_{n+1} > 0$ 。所以 $\sqrt{1+a_{n+1}} = \sqrt{1+a_n} + 1$ ；另外亦有 $\sqrt{1+a_1} = 1$ 。由此可知 $\{\sqrt{1+a_n}\}$ 是首項、公差均為 1 的等差數列，故 $\sqrt{1+a_n} = n$ ，即 $a_n = n^2 - 1$ 。 □