

教育部 100 學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題 (一) (時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
 2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。
-

一、觀察一組 0, 1 所組成的數列，我們定義：當 1 個或多個相同數連在一起時，稱為一個“串”。例如“10000111011”共有 5 個串，或說其串數為 5。今將 n 個 0 和 m 個 1 隨機排列，形成一串數為 R 的數列。

(a) 求 $R=2$ 的機率。

(b) 若 $R=2k+1$ ， k 為整數，則 k 的範圍為何？

(c) 求 $R=2k+1$ 的機率。

【解】

(a) $\frac{2}{C_n^{m+n}}$

(b) 當 $n \neq m$ ， $1 \leq k \leq \min(m, n)$

當 $n = m$ ， $1 \leq k \leq m-1$

(c) $\frac{C_k^{m-1}C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^{m-1}C_k^{n-1}}{C_n^{m+n}}$

令 R_1 代表 “1” 的串數， R_0 代表 “0” 的串數，則 $R = R_0 + R_1$ 。

若 $R_1 = r$ ，則 R_0 的值只可能是 r ， $r-1$ ，或 $r+1$ ，反之亦然。

所以，

$$p(R=2k+1) = p(R_1=k+1 \text{ 且 } R_0=k) + p(R_1=k \text{ 且 } R_0=k+1). \quad \cdots (1)$$

先求 $p(R_1=k+1 \text{ 且 } R_0=k)$ 。

(a) 先將 n 個 0 分成 k 堆，各有 x_1, \dots, x_k 個，即滿足

$$x_1 + \cdots + x_k = n, \quad x_i \geq 1, \quad \text{共有 } C_{k-1}^{n-1} \text{ 種分法。}$$

(b) m 個 1 要形成 $k+1$ 個串，則要在其 $m-1$ 個間隔中，選出 k 個間隔並插入 (a) 中的 “0” 串，共有 C_k^{m-1} 種選法。

所以，由(a), (b)知：

$$P(R_1 = k+1 \text{ 且 } R_0 = k) = \frac{C_k^{m-1} C_{k-1}^{n-1}}{C_n^{m+n}}. \dots (2)$$

同理可得，

$$P(R_1 = k \text{ 且 } R_0 = k+1) = \frac{C_{k-1}^{m-1} C_k^{n-1}}{C_n^{m+n}}. \dots (3)$$

因此，由 (1), (2), (3) 知，

$$p(R = 2k+1) = \frac{C_k^{m-1} C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^{m-1} C_k^{n-1}}{C_n^{m+n}}.$$

二、設 $\frac{1}{2} < a_1 < \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = a_n(2 - a_{n+1})$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 證明
(10 分)

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - n < 2.$$

【解】

$$\text{由 } a_{n+1} = a_n(2 - a_{n+1}) \text{ 得 } a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}.$$

解方程 $x = \frac{2x}{x+1}$, 得到兩個不動點 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

$$\text{再由 } a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1} \text{ 和 } a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}, \text{ 可得 } \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n - 1}{a_n} \right),$$

由此得出，

$$\frac{1}{a_n} = 1 + \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

注意到 $\frac{1}{2} < a_1 < \frac{2}{3}$ 時， $\frac{1}{2} < \frac{1}{a_1} - 1 < 1$, 故

$$1 + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

所以，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} &< \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= n + 2 - \frac{1}{2^n} < n + 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= n + 1 - \frac{1}{2^n} > n + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故，

$$n + \frac{1}{2} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < n + 2.$$

三、找出所有的正整數 n, x, y, z, t 使得
(10 分)

$$n^x + n^y + n^z = n^t.$$

【解】

很明顯地， $n \neq 1$ ，所以我們可假設 $n > 1$ 。不知一般性，假設 $x \leq y \leq z \leq t$ 。

$$n^x + n^y + n^z = n^t \Rightarrow 1 + n^{y-x} + n^{z-x} = n^{t-x}.$$

若 $y > x$ ，則 $\text{mod } n$ 後得 $1 \equiv 0 \pmod{n}$ ，矛盾，所以 $y = x$ 。因此，方程式簡化為

$$2 + n^a = n^b, \text{ 其中 } a = z - x, b = t - x.$$

若 $a = 0$ ，則 $n = 3$ 且 $b = 1$ ，可得解

$$(n, x, y, z, t) = (3, x, x, x, x+1), x \in \mathbb{N}.$$

若 $a > 0$ ，則 $\text{mod } n$ 後得 $2 \equiv 0 \pmod{n}$ ，所以 $n = 2$ ，此時方程式再簡化為

$$\begin{aligned}2 + 2^a &= 2^b, b \geq a > 0 \\ \Rightarrow 2^{b-1} - 2^{a-1} &= 1 \\ \Rightarrow a = 1 \text{ and } b &= 2\end{aligned}$$

所以，

$$(n, x, y, z, t) = (2, x, x, x+1, x+2), x \in \mathbb{N}.$$

四、設 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是一個嚴格遞增函數，即 $f(m) < f(n)$ ，對所有 $m < n$ 皆成立。(10 分) 已知 $f(2) = 2$ 且 $f(mn) = f(m)f(n)$ 對所有互質的 m, n 都成立，試找出所有滿足以上條件的函數 f 並證明之。(\mathbb{N} 代表所有正整數所成的集合)

【解】 $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

先求 $f(3)$:

$$\because f(3)f(5) = f(15) < f(18) = f(2)f(9)$$

$$\therefore f(3)f(5) < 2f(9) < 2f(10) = 2f(2)f(5) = 4f(5)$$

$$\Rightarrow f(3) < 4$$

又 $f(3) > f(2) = 2$ ，所以， $f(3) = 3$.

$$f(6) = f(2)f(3) = 6 \Rightarrow f(4) = 4 \text{ 且 } f(5) = 5.$$

接下來，以數學歸納法證明 $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

首先，當 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 時，結果成立。

令 $n > 6$ 且 $f(k) = k, k < n$. 欲證 $f(n) = n$.

設 $2^r(2m+1)$ 為不小於 n 且不為 2 的次方的最小偶數，

則 $2^r(2m+1) = n, n+1, n+2$ ，或 $n+3$.

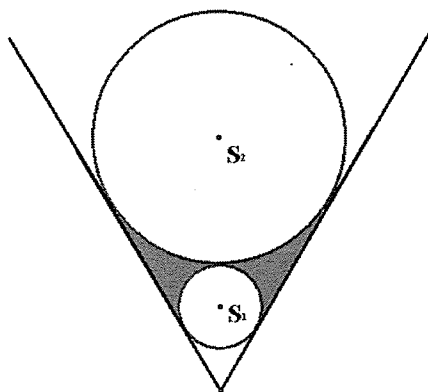
$$\because n > 6, 2^r < n, 2m+1 < n,$$

$$\therefore f(2^r(2m+1)) = f(2^r) f(2m+1) = 2^r(2m+1).$$

\Rightarrow 由嚴格遞增性知： $f(k) = k, \forall k \leq 2^r(2m+1)$.

$\Rightarrow f(n) = n$.

五、現有一個倒圓錐，放入兩個半徑不同的球 S_1 與 S_2 ，使得 S_1 與 S_2 互相外切，且同時與圓錐相切 (S_1 與 S_2 剛好卡在圓錐中，如下圖所示)。假設在 S_1 、 S_2 與圓錐所圍出的空隙中 (灰色區域) 可以放入 n 個全等的小球，使其圍成一圈、每個小球都與圓錐相切、分別與 S_1 、 S_2 外切、且相鄰的小球也互相外切，試證： $6 < n < 10$. ($\sin 18^\circ \approx 0.3090$) (10 分)



【證】

$$\overline{DE}^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$$

$$\therefore \overline{DE} = \overline{DF} + \overline{FE}$$

$$\therefore \sqrt{Rr} = \sqrt{Rx} + \sqrt{rx}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \dots\dots (1)$$

因為小球的球心均在與圓 軸垂直的一個平面上，

這些小球的球心在 \overline{AB} 上的投影是同一點 O 。

它們均在以 O 為圓心， y 為半徑的圓上。

考慮梯形 $ECBD$ 面積：

$$\frac{(r+R) \cdot \sqrt{4Rr}}{2} = \frac{(r+x) \cdot \sqrt{4xr}}{2} + \frac{(x+R) \cdot \sqrt{4xR}}{2} + \frac{(r+R) \cdot y}{2}$$

$$\Rightarrow (r+R) \cdot \sqrt{Rr} = (r+x) \cdot \sqrt{xr} + (x+R) \cdot \sqrt{xR} + \frac{(r+R) \cdot y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(r+R) \cdot y}{2} = (r+R) \cdot \sqrt{Rr} - (r+x) \cdot \sqrt{xr} - (x+R) \cdot \sqrt{xR}$$

$$= (r+R) \sqrt{Rr} - r \sqrt{xr} - x \sqrt{xr} - x \sqrt{xR} - R \sqrt{xR}$$

$$= (r+R) \sqrt{Rr} - r \sqrt{xr} - x \sqrt{x} (\sqrt{r} + \sqrt{R}) - R \sqrt{xR}$$

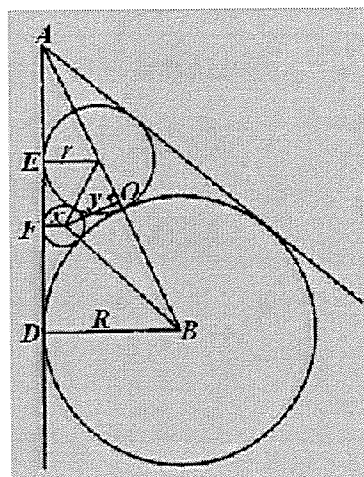
$$= (r+R) \cdot \sqrt{Rr} - x \sqrt{Rr} - r \sqrt{xr} - R \cdot \sqrt{xR} \quad (\text{利用}(1))$$

$$= (r+R) \cdot \sqrt{Rr} - x \sqrt{Rr} - r \sqrt{r} \cdot \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} - R \sqrt{R} \cdot \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}$$

$$= (r+R) \cdot \sqrt{Rr} - x \sqrt{Rr} - \sqrt{Rr} \left(\frac{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \right)$$

$$= (r+R) \cdot \sqrt{Rr} - x \sqrt{Rr} - \sqrt{Rr} (R + r - \sqrt{Rr})$$

$$= Rr - x \sqrt{Rr} = x(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2 - x \sqrt{Rr}$$



$$= x(R+r+\sqrt{Rr})$$

$$\therefore \sin \frac{360^\circ}{2n} = \frac{x}{y} = \frac{R+r}{2(R+r+\sqrt{Rr})} < \frac{1}{2}$$

$$\text{且 } \sin \frac{360^\circ}{2n} = \frac{x}{y} = \frac{R+r}{2(R+r+\sqrt{Rr})} > \frac{R+r}{3(R+r)} = \frac{1}{3}$$

(考慮分母，利用算幾不等式：

$$(2(R+r+\sqrt{Rr})) = 2R+2r+2\sqrt{Rr} < 2R+2r+(R+r) \text{ — 等號不會成立})$$

$$\therefore \frac{1}{3} < \sin \frac{360^\circ}{2n} < \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sin 18^\circ \approx 0.3090 < \frac{1}{3} < \sin \frac{360^\circ}{2n} < \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$

因為 \sin 函數在 $0^\circ - 90^\circ$ 為增函數，所以 $18 < \frac{360}{2n} < 30$ ，故 $6 < n < 10$ 。

