

一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（台南區） 筆試（一）

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $\omega = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ ，若以 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^9, \omega^{11}, \omega^{13}$ 為根之方程式為

$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + sx + t = 0$ ，則 $ace + bd - st$ 之值為何？

【參考解答】：

顯然 $a \neq 0$

因為 $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{13}, \omega^{14}$ 是 $x^{14} - 1 = 0$ 之根

$$\Rightarrow x^{14} - 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)(x - \omega^3) \cdots (x - \omega^{14}) \text{-----(1)}$$

又 $\omega^2, \omega^4, \omega^6, \omega^8, \omega^{10}, \omega^{12}, \omega^{14}$ 是 $x^7 - 1 = 0$ 之根

$$\Rightarrow x^7 - 1 = (x - \omega^2)(x - \omega^4)(x - \omega^6)(x - \omega^8)(x - \omega^{10})(x - \omega^{12})(x - \omega^{14}) \text{-----(2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \text{ 得 } x^7 + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^5)(x - \omega^7)(x - \omega^9)(x - \omega^{11})(x - \omega^{13})$$

$$\text{因為 } x - \omega^7 = x + 1$$

$$\text{所以 } (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^5)(x - \omega^9)(x - \omega^{11})(x - \omega^{13})$$

$$= \frac{x^7 + 1}{x + 1} = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

這說明了 $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ 的六個根分別是 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^9, \omega^{11}, \omega^{13}$

因為以 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^9, \omega^{11}, \omega^{13}$ 為根之方程式為 $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + sx + t = 0$

$$\text{比較這 2 個六次方程式的係數可得 } \frac{1}{a} = \frac{-1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{-1}{d} = \frac{1}{e} = \frac{-1}{s} = \frac{1}{t}$$

$$\text{故 } b = d = s = -a \text{ 且 } c = e = t = a$$

$$\text{故 } ace + bd - st = a^3 + 2a^2$$

$$(-b^3 + b^2 = c^3 + 2c^2 = -d^3 + d^2 = e^3 + 2e^2 = -s^3 + s^2 = t^3 + 2t^2 \text{ 或其他混合表法})$$

二、設線段 AB 為圓上一弦， C 、 D 兩點為 AB 上半弧上任意兩相異點（舉例而言，如右下圖）。設 P 、 Q 兩點分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的內心。試證 A 、 B 、 P 、 Q 四點共圓，並求其圓心位置。

【參考解答】

$\angle ACB$ 的角平分線 CH

$\angle BAC$ 的角平分線 AK

兩線交於 P 點， P 點為 $\triangle ABC$ 的內心

弧 AH = 弧 HB ，因 $\angle ACH = \angle BCH$

因此，可知 $HA = HB$

我們只須證明 $HA = HP$ (即 $\triangle HAP$ 為等腰三角形)，

即可推知

$HA = HP = HQ = HB$

$\angle PAH = 1/2(\text{弧角 } HB + \text{弧角 } BK)$

弧角 BK = 弧角 KC ，因 $\angle BAK = \angle CAK$

$\angle APH$ 為 $\triangle APC$ 的外角，因此，

$\angle APH = \angle ACP + \angle CAP = 1/2(\text{弧角 } AH + \text{弧角 } CK)$

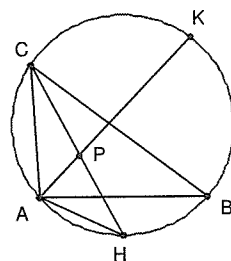
$= 1/2(\text{弧角 } HB + \text{弧角 } BK) = \angle PAH$ ，

$\therefore \triangle HAP$ 為等腰三角形且 $HA = HP = HB$ 。

同理可知， $\triangle HAQ$ 為等腰三角形，且 $HA = HQ = HB$ 。

由此可知 $HA = HB = HP = HQ$ ，即

A 、 B 、 P 、 Q 四點共圓的圓心是 H



三、已知 a, b, c 為三個複數，且滿足 $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$ 。

試證： $|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$

【參考解答】

由已知得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = 0$ ，所以三個複數 $\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \frac{c}{|c|}$ 分布在單位圓上且重心為原

點，即他們兩兩夾角為 120° ，亦即 a, b, c 兩兩夾角為 120° 。

考慮 $a, b, a-b$ 所形成的三角形

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cos 120^\circ = |a|^2 + |b|^2 + |a| \cdot |b| \geq 3|a| \cdot |b|$$

$$\text{同理 } |b-c|^2 \geq 3|b| \cdot |c|, |c-a|^2 \geq 3|c| \cdot |a|$$

$$\text{所以 } |(a-b)(b-c)(c-a)|^2 \geq (3|ab|)(3|bc|)(3|ca|) = 27|abc|^2$$

$$\text{故證得 } |(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$$

四、設 $f(x) = ax + b$ 且滿足 $ab > 0$ 及 $a + b = 1$ 。若已知 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ ，
 $x_i > 0$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，求證 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \geq 1$ 。

【參考解答】

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = (ax_1 + b)(ax_2 + b)\cdots(ax_n + b)$$

則 $a^k b^{n-k}$ 的係數為

$$x_1 x_2 \cdots x_k + x_2 x_3 \cdots x_{k+1} + \cdots + x_{n+1-k} x_{n-k} \cdots x_n, \text{ 共有 } C_k^n \text{ 項}$$

$$\text{令此 } C_k^n \text{ 項的和為 } S, \text{ 則 } \frac{S}{C_k^n} \geq \sqrt[n]{x_1^k x_2^k \cdots x_n^k} = 1$$

$$\text{因此 } S \geq C_k^n$$

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) &= (ax_1 + b)(ax_2 + b)\cdots(ax_n + b) \\ &\geq C_n^n a^n + C_{n-1}^n a^{n-1}b + \cdots + C_1^n ab^{n-1} + b^n \\ &= (a+b)^n = 1 \end{aligned}$$

等號成立於 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$