

# 教育部 100 學年度高級中學數學競賽

## 嘉義區複賽試題 (一) (時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、國慶煙火在施放後升空 700 公尺時爆炸，煙火半徑為 300 公尺，則站 (9 分)  
立於距煙火施放處多少公尺可以看得最清楚 (提示，此時有最大視角)？

【解】

設煙火最低處距地面  $a$  公尺，最高處距地面  $b$  公尺，則

$$\tan \theta = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}$$

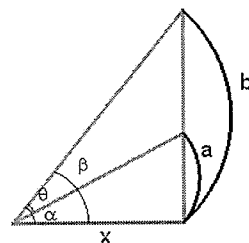
$$\text{令 } y = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}, \text{ 則 } yx^2 - (b-a)x + yab = 0$$

$$\text{配方法得 } x = \frac{b-a}{2y} \text{ 時, } y \text{ 有最大值 } \frac{(b-a)}{2\sqrt{ab}}$$

$\therefore$  在  $x = \sqrt{ab}$  處有最大視角。

由題意知， $a = 700 - 300 = 400$ ， $b = 400 + 600 = 1000$

$$\therefore x = \sqrt{4 \times 10^5} = 200\sqrt{10} \text{ (公尺)}。$$



二、實數  $a, b, c, d, e$  滿足  $a + b + c + d + e = 8$ ， $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ ， (10 分)  
則  $e$  的最大值為何？

【證】

$$\text{令 } d' = a + \frac{e}{4}, \quad b' = b + \frac{e}{4}, \quad c' = c + \frac{e}{4}, \quad d' = d + \frac{e}{4}。$$

$$\text{則 } a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{(a+b+c+d)e}{2} + \frac{e^2}{4}$$

$$= 16 - e^2 + \frac{(8-e)e}{2} + \frac{e^2}{4}$$

$$= 16 - \frac{5e^2}{4} + 4e = \frac{96}{5} - \frac{5}{4}\left(e - \frac{8}{5}\right)^2$$

$a' + b' + c' + d' = 8$ 。由 Cauchy 不等式，

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)(1+1+1+1) \geq (a' + b' + c' + d')^2 = 64$$

知  $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$  之最小值為 16。

而  $\left(e - \frac{8}{5}\right)^2$  之最大值為  $\frac{4}{5} \cdot \frac{16}{5}$ 。e 的最大值必不小於 a, b, c, d, e 的平均值

$\frac{8}{5}$ 。故 e 的最大值為  $\frac{8}{5} + \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$ 。

三、一圓圓心為 O，L 為過圓心的直線，過 O 且與 L 垂直的直線交圓於 N，  
(10 分)

P、Q 為圓上兩點，PQ、NQ、NP 分別交 L 於 R、S、T。已知  $\angle PNQ = 105^\circ$ ，

$\angle PRT = 25^\circ$ ，且  $\angle NST \geq \angle NTS$ ，試證： $\overline{PT} = \overline{PR}$ 。

【解】

如圖，令 Q' 為 Q 對 ON 的反射點，NQ' 交 L 於 S'。則  $\angle NST = \angle NS'R$ ，

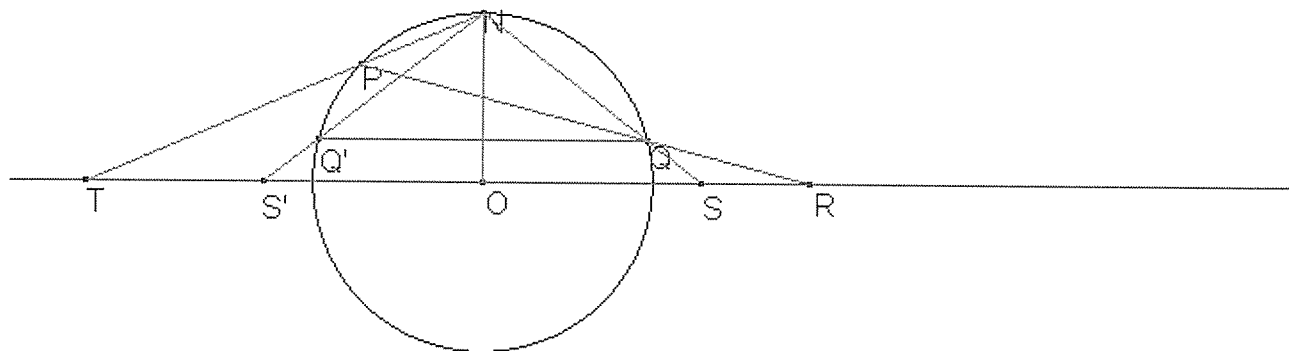
$\angle NS'R = \angle NTR + \angle TNS'$ 。

因 PNQQ' 共圓及  $QQ' \parallel L$ ， $\angle TNS' = \angle PQQ' = \angle PRT$ 。

故  $\angle NST = \angle NTR + \angle PRT$ ， $\angle NST - \angle NTR = \angle PRT = 25^\circ$ 。

因  $\angle PNQ = 105^\circ$ ， $\angle NSR + \angle NTR = 180^\circ - \angle PNQ = 75^\circ$ 。

故  $\angle NST = 50^\circ$ ， $\angle NTR = 25^\circ$ ， $PT = PR$ 。



四、設  $a_1 = 2$  ,  $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{5}{2a_{n-1}}$  ,  $n = 2, 3, \dots$   
(10 分)

(1) 證明：對所有自然數  $n \geq 2$  ,  $\sqrt{5} < a_n < 3$  。(4 分)

(2) 證明：  $a_8 - \sqrt{5} < 10^{-159}$  。(6 分)

【解】

$$\begin{aligned} (1) \text{ 因為 } a_n - \sqrt{5} &= \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{5}{2a_{n+1}} - \sqrt{5} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{\frac{5}{a_{n+1}}} \right)^2 = \frac{1}{2a_{n+1}} (a_{n+1} - \sqrt{5})^2 \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

我們可以得到  $a_n > \sqrt{5}$  ( $n \geq 2$ ) 。

顯然  $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{5}{2a_1} = 1 + \frac{5}{4} < 3$  。若  $n = k$  ( $\geq 2$ ) 時  $a_k < 3$  ,

$$\text{則 } a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{5}{2a_k} < \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{5}} < 3$$

由數學歸納法得  $a_n < 3$  ( $n \geq 2$ ) 。

$$(2) \text{ 令 } b_n = \frac{a_n - \sqrt{5}}{a_n + \sqrt{5}} \text{ , 則因 } a_n + \sqrt{5} = \frac{1}{2a_{n-1}} (a_{n+1} + \sqrt{5})^2 \text{ (證法與(*)同)}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{5}}{a_{n+1} + \sqrt{5}} = \left( \frac{a_n - \sqrt{5}}{a_n + \sqrt{5}} \right)^2 = b_n^2$$

$$\text{及 } b_8 = b_7^2 = b_6^4 = \dots = b_1^{128} \text{ 。}$$

$$\text{由 } b_8 = \frac{a_8 - \sqrt{5}}{a_8 + \sqrt{5}} > \frac{a_8 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \text{ , 得 } a_8 - \sqrt{5} < (3 + \sqrt{5}) \left( \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \right)^{128} = \frac{(3 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})^{256}}$$

$$\text{注意到 } (2 + \sqrt{5})^4 = (9 + 4\sqrt{5})^2 > (8\sqrt{5})^2 = 2^5 \times 10$$

$$\text{便知 } (2 + \sqrt{5})^{256} > (2^5 \times 10)^{64} = 10^{64} \cdot 2^{320} > 10^{64} \cdot (10^3)^{32} = 10^{160}$$

$$\text{因此, } a_8 - \sqrt{5} < \frac{(3 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})^{256}} < \frac{(3 + \sqrt{5})}{10^{160}} < 10^{-159} \text{ 。}$$

五、考慮所有形如  $x+y\sqrt{3}$  的實數，其中  $x$  和  $y$  為整數，且  $|x|, |y| \leq 2011$ 。  
(10 分)

證明：在這些數中存在一個數  $x_0+y_0\sqrt{3}$ ，其中  $x_0$  和  $y_0$  不全為零，且滿足  $|x_0+y_0\sqrt{3}| < \frac{3}{2013}$ 。

【解】

先考慮所有形如  $x+y\sqrt{3}$  的數，且  $x$  和  $y$  都是不大於 2011 的非負整數。由於  $x$  和  $y$  取  $0, 1, 2, \dots, 2011$ ，共  $2012$  個整數，所以這樣的數共有  $2012^2$  個，且最大的一個為  $2011(1+\sqrt{3})$ 。

把這些數畫在數線上，這些數在數線上左端點為 0，右端點為 A:  $2011(1+\sqrt{3})$ 。把線段  $\overline{OA}$  平均分成  $2012^2-1$  個線段，則這  $2012^2$  個點中至少有兩個點在同一個小段

內。設這兩點對應的數為  $x_1+y_1\sqrt{3}$ ，它們的距離不大於  $\frac{2011(1+\sqrt{3})}{2012^2-1}$ ，即

$$|(x_1+y_1\sqrt{3})-(x_2+y_2\sqrt{3})| \leq \frac{2011(1+\sqrt{3})}{2012^2-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2013} < \frac{3}{2013}。$$

由於  $|x_1-x_2|, |y_1-y_2| \leq 2011$ ，所以  $x_0+y_0\sqrt{3} = (x_1-x_2) + (y_1-y_2)\sqrt{3}$  是題設中的

數，且滿足  $|x_0+y_0\sqrt{3}| < \frac{3}{2013}$ 。