

一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區） 筆試（一）

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時
- (2) 本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

一、(1) 滿足 $x^2 + y^2 = z^2$ 的正整數 x, y, z 稱為畢氏三數組，證明互質的畢氏三數組 x, y, z 必為兩兩互質且 x 和 y 為一奇一偶。

(2) 如果 x, y, z 為一組互質的畢氏三數組(假設 x 是偶數)，則必存在一奇一偶且互質的 s 和 t 使 $x = 2st, y = t^2 - s^2, z = s^2 + t^2$ (假設 $t > s$)，利用此證明 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有正整數 x, y, z 的解。

【參考解答】

(1) 如果 x 和 y 不互質，則存在一個質數 p 使 $p|x$ 且 $p|y$ ，容易可證 $p|z$ ，與 x, y, z 互質矛盾，所以 x 和 y 互質。同理 y 和 z 互質， x 和 z 互質。

如果 x 和 y 同為奇數，則 x^2 和 y^2 被 4 除都餘 1，所以 z^2 被 4 除餘 2，但有整數的平方被 4 除餘 2 的，矛盾。又 x 和 y 互質，因此 x 和 y 為一奇一偶。

(2) 如果 $x^4 + y^4 = z^2$ 有正整數 x, y, z 的解(其中 x 是偶數)。假設 a, b, c 為其中一組且 a 為所有解中的最小 x 。由所給的結果，存存在一奇一偶且互質的 s 和 t 使 $a^2 = 2st, b^2 = t^2 - s^2, c = s^2 + t^2$ ，其中 s 是偶數，因此 $t = l^2, s = 2k^2, k < a$ ，又 $s^2 + b^2 = t^2$ ，存在一奇一偶且互質 u 和 v 使 $s = 2uv, b = v^2 - u^2, t = u^2 + v^2$ ，其中 $v > u$ 因此 $k^2 = uv$ ，故 $u = d^2, v = e^2$ ，其中 d 和 e 為一奇一偶且互質，而且偶數的會小於 a 。將之代入 $t = u^2 + v^2$ 得到 $d^4 + e^4 = l^2$ ，得到一組偶數比 a 小的解，與 a, b, c 為其中一組且 a 為所有解中的最小 x 的假設矛盾。因此 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有正整數 x, y, z 的解。

二、已知 $a + b = 1$ 且 $ab > 0$ ， $4ab \neq 1$ 。試證： $9ab(1 - 2a)(1 - 2b) < (1 - 4ab)^2$

【參考解答】

(一) $0 < a < 1$ ， $0 < b < 1$ ，

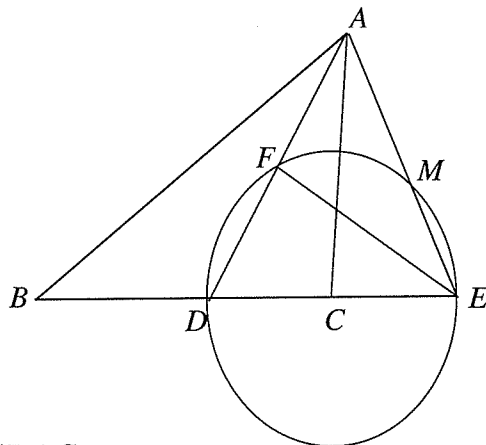
$$1 - 2a = b - a, \quad 1 - 2b = a - b$$

$$9ab(1 - 2a)(1 - 2b) = -9ab(a - b)^2 \leq 0$$

因為 $4ab \neq 1$ ，所以 $(1 - 4ab)^2 > 0$

三、如右圖， $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle BAC$ 的平分線，以 C 為圓心， CD 為半徑的半圓交 BC 的延長線於點 E ，交 AD 於點 F ，交 AE 於點 M ，且 $\angle B = \angle CAE$ ， $FE:FD = 4:3$ 。

- (1) 求證： $AF = DF$ ；
- (2) 求 $\angle AED$ 的餘弦值；
- (3) 如果 $BD = 10$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積。



【參考解答】

$$(1) \because AD \text{ 平分 } \angle BAC \quad \therefore \angle BAD = \angle DAC$$

$$\because \angle B = \angle CAE \quad \therefore \angle BAD + \angle B = \angle DAC + \angle CAE$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BAD + \angle B$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAE \Rightarrow EA = ED$$

$$\because DE \text{ 是圓 } C \text{ 的直徑} \Rightarrow \angle DFE = 90^\circ$$

$$\therefore AF = DF$$

- (2) 過點 A 作 $AN \perp BE$ 於 N ，在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中，因 $FE:FD = 4:3$ ，故設 $FE = 4x$ ($x > 0$)，則 $FD = 3x$ ，由勾股定理得 $DE = 5x$ 。所以，

$$AE = DE = 5x, \quad AF = FD = 3x$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot EF = \frac{1}{2} DE \cdot AN$$

$$\Rightarrow AD \cdot EF = DE \cdot AN \Rightarrow (3x + 3x) \cdot 4x = 5x \cdot AN$$

$$\therefore AN = \frac{24}{5}x, \text{ 由勾股定理得 } EN = \frac{7}{5}x$$

$$\therefore \cos \angle AED = \frac{EN}{AE} = \frac{7}{25}。$$

$$(3) \text{ 由(2)知 } \cos \angle AED = \frac{7}{25}, \text{ 得 } \sin \angle AED = \frac{24}{25} \Rightarrow AN = \frac{24}{25} AE = \frac{24}{5}x$$

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle ABE$ 中

$$\because \angle CAE = \angle B, \angle AEC = \angle BEA \Rightarrow \triangle CAE \sim \triangle ABE$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow AE^2 = BE \cdot CE$$

$$\Rightarrow (5x)^2 = (10+5x)\left(\frac{5}{2}x\right) \Rightarrow x=2$$

$$\therefore AN = \frac{24}{5}x = \frac{48}{5}, \quad BC = BD + DC = 10 + \frac{5}{2}x = 15$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AN = \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{48}{5} = 72 \quad .$$

四、設 $x_0 = 2\sqrt{3}$, $y_0 = 3$, 對於任意一個正整數 n , $x_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}$ 且 $y_n = \sqrt{x_n y_{n-1}}$ 。

證明：對於所有正整數 n , $y_{n-1} < y_n < x_n < x_{n-1}$ 。

【參考解答】

(1) 利用數學歸納法證明：對於所有正整數 n , $x_n > y_n > 1$ 。

已知 $x_0 > y_0 > 1$, 假設 $x_{n-1} > y_{n-1} > 1$, 則

$$\because y_{n-1}^2 - x_{n-1}y_{n-1} = y_{n-1}(y_{n-1} - x_{n-1}) < 0 \Rightarrow y_{n-1}(y_{n-1} + x_{n-1}) < 2x_{n-1}y_{n-1}$$

$$\therefore x_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} > y_{n-1}$$

$$\because \sqrt{x_n} > \sqrt{y_{n-1}} > 1 \Rightarrow x_n > \sqrt{x_n y_{n-1}} = y_n > 1 \cdot 1 = 1$$

根據數學歸納法，可證得：對於所有正整數 n , $x_n > y_n > 1$ 。

$$(2) \because y_n < x_n \Rightarrow 2y_n < x_n + y_n \therefore x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} < 2x_n y_n \cdot \frac{1}{2y_n} = x_n$$

$$\because x_{n+1} > y_n \Rightarrow y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n} > \sqrt{y_n^2} = y_n$$

故由(1)和(2)證得：對於所有正整數 n , $y_{n-1} < y_n < x_n < x_{n-1}$ 。